

A szivárvány fizikája

Az esőcseppek fényszórási jelenségei

Cserti József
Eötvös Loránd Tudományegyetem,
Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

2005. szeptember

Bevezetés

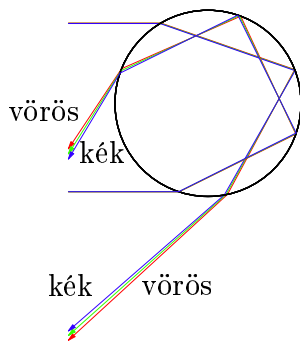
A szivárvány a természet csodálatos tüneménye, ami számtalan festőt, költőt megihletett (például Arany János: A gyermek és szivárvány), és több fizikus is tanulmányozta a jelenséget. Azt gondolhatnánk, hogy a szivárvány jelenségének értelmezése az egyszerű geometriai optika keretén belül régóta megoldott probléma, s csak történeti jelentősége van. Meglepő módon azonban, kielégítő elméleti magyarázatot csak a XX. század elején sikerült kidolgozni. Ráadásul ez az elmélet több, mint geometriai optika, magában foglalja mindazt, amit a fény természetéről tudunk. Így például a szivárvány leírásához figyelembe kell venni a fény hullámtermészetét is. Végso soron a szivárvány létrejötte annak tulajdonítható, hogy az elektromágneses tér (fény) egy közel gömb alakú vízcseppen szóródik. Ezt a szórási jelenséget egyáltalán nem egyszerű leírni a Maxwell-egyenletek alapján. Az interferencia, a fényelhajlás és a fény polarizációja egyaránt lényeges a jelenség megértésében. A századok alatt több neves kutató tanulmányozta a szivárványt, és eredményeik alapvetően alakították a fizikának egy, napjainkban is izgalmas területét, az optikát.

A szivárványt akkor láthatjuk, ha az előttünk hulló esőcseppekre a mögöttünk lévő Nap rá-
süt. Alakja körív. A természetben a szivárványnak két fő íve figyelhető meg: a főszivárvány és a halványabb mellékszivárvány. A főszivárványban a belső körív kék, míg a külső vörös színű. A mellékszivárványban a színek sorrendje fordított, a belső körív vörös, a külső kék. Alaposabb megfigyelésekből kiderül, hogy a két szivárvány íve közti tartomány jelentősen sötétebb, mint az ég más része. Ezt a sötét sávot az ókori Aphrodisias Alexander tiszteletére, aki Kr. e 200-ban figyelte meg ezt a jelenséget, *Alexander-féle sötét sávnak* nevezik. Az interneten több helyen is találhatunk fényképeket a szivárványról, például az [1] internetcímen látható képen jól megfigyelhető a szivárvány mindkét íve és a köztük levő sötét sáv is. Egy másik jelenség (sajnos csak ritkán figyelhető meg), hogy a főszivárvány alatt további *jámulékos íveket* látunk (angolul *supernumerary arcs*), egy kitűnő felvétel található a [2] internetcímen. Mint látni fogjuk, ezen járulékos ívek létrejötte a megértése alapvető szerepet játszott a szivárvány elméletének kidolgozásában.

Arisztotelész még úgy vélte, hogy a szivárvány a napfény felhőkön történő visszaverődésének a következménye. Ez az állítás egyáltalán nem volt nyilvánvaló a kor akkori elképzelései alapján, ugyanis korábban úgy gondolták, hogy a szivárvány egy anyagi objektum az ég egy meghatározott helyén. A szivárvány ívének szögét elsőként *Roger Bacon* mérte meg 1266-ban, és eredményei szerint főszivárványra a szivárvány ívének egy pontjából a Nap felé és a megfigyelő felé mutató irány 42° -os szöget zár be. Mellékszivárványra ez a szög 50° . Jelentősebb előrelépés a szivárvány megértésében *Arisztotelész* után csak 17 évszázad elteltével a német *Theodoric Freiberg* szerzetesnek köszönhető. Elutasította *Arisztotelész* hipotézisét, miszerint a szivárvány a fénysugaraknak a felhőben lévő összes esőcseppen történő együttes visszaverődésének a következménye. Mérésekkel igazolta, hogy a szivár-

vány létrejöhet a fény egyetlen vízcsepről történő visszaverődésével is. Kísérleteihez gömb alakú vízzel töltött üvegpalackot használt, és megfigyelte a szivárványt létrehozó fénysugarak menetét.

Lényegében három évszázadon át elfelejtették Freiberg eredményeit. *René Descartes* 1637-ben mutatta meg újra Freibergtől függetlenül, hogy a főszivárvány keletkezésénél a fény először megtörik a vízcsepp felületén, majd a vízcsepp belső felületén *egyszer* visszaverődik, és aztán ismételt fénytöréssel kilép a vízcseppből [3]. A mellékszivárvány esetében a vízcseppen belül *két* visszaverődés történik. Az 1. ábrán látható a különböző színű fénysugarak törése a fő-, illetve mellékszivárvány kialakulásakor. Freiberg és Descartes megállapították, hogy a szemünkbe érkező különböző színű fénysugarak



1. ábra. A fénysugarak menete különböző színekre főszivárvány (egyszeres belső visszaverődés) és mellékszivárvány (kétszeres belső visszaverődés) esetén. A vízszintes vonalak mutatják a vízcseppbe lépő fénysugarakat. A zöld színű fénysugár a vörös és a kék színű sugarak között halad. A rajznál és a később bemutatandó numerikus eredményeknél a 15 °C-os hőmérsékletű vízre vonatkozó $n = 1,330$; $n = 1,335$; $n = 1,340$ törésmutatókat használtuk rendre, a vörös, a zöld és a kék színekhez [4].

eltérő vízcseppekből jönnek. A szivárvány egységes geometriai optikai értelmezése Descartes nevéhez fűződik. Számításai során a ma már jól ismert töréstörvényt, mai nevén *Snellius–Descartes-törvényt* alkalmazta:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n, \quad (1)$$

ahol α a beesési szög, β a törési szög, és n az anyag törésmutatója¹.

A szivárvány jelenségének irodalma óriási. Bevezetésként, a téma egyik kiemelkedő szakértőjének, *H. Moysés Nussenzveignek* a népszerűsítő cikkét [6], *Honyek Gyulának* a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapokban megjelent írását [7] és *Czelnai Rudolfnak* a meteorológus képzésben használt egyetemi jegyzetét [8] ajánlhatjuk az olvasónak. A matematikai részletek iránt érdeklődők számára a leideni professzor, *Hendrik Christoffel van de Hulst* [9] klasszikusnak számító könyvét, *Milton Kerker* [10] fényszórásról írt könyvét és *John A. Adam* [11] hosszú, összefoglaló cikkét javasoljuk. A szivárványnak a tudománnyal és a művészettel való kapcsolatáról *Raymond L. Lee* és *Alistair B. Fraser* közelmúltban megjelent és gazdagon illusztrált könyvét [12] ajánljuk.

A továbbiakban áttekintjük a szivárvány fizikájának legfontosabb elemeit, és igyekszünk nyomon követni a jelenség megértésében történeti szempontból is mérföldkönek számító elméleti eredményeket. Elsőként részletesen ismertetjük Descartes geometriai optikán alapuló elméletét. A következő fejezetben a polarizáció szerepét, *Thomas Young* interferencia-elméletét, majd *George Biddell Airy* elméletét taglaljuk. Ezt követően vázoljuk a múlt század elején *Gustav Mie* által kidolgozott legpontosabb elméletet, illetve a modern matematikai módszerekkel kapott közelítő eredményekről adunk

¹Megjegyezzük, hogy az angol nyelvű irodalomban ezt a törvényt egyszerűen csak Snell-törvénynek nevezik. Nem lehet bizonyosan tudni, hogy Descartes ismerte-e a leideni egyetem professzorának, *Willebrord Snellnek* az eredményeit, melyet ő maga már 1620-ban tanított az egyetemen. Tény, hogy a töréstörvényt Descartes publikálta először, de nem említi Snell munkásságát. Descartes tudományos tevékenységéről bővebb betekintést például Simonyi Károly művéből kaphatunk [5].

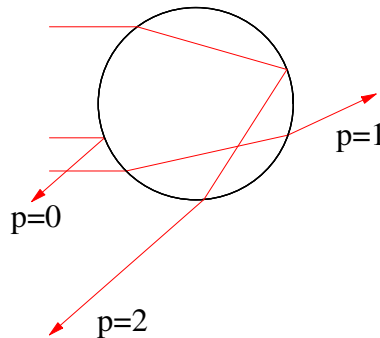
rövid áttekintést, beleértve a témához szorosan kapcsolódó koszorú és glória jelenséget is. A következő fejezetben szólnunk a szivárvány és a kvantummechanika kapcsolatáról. Végül az összefoglalóban további, a témával kapcsolatos kérdéseket említünk meg.

Megjegyezzük, hogy a cikk ábráinak egy része a *Mathematica* programmal készült, és eredetileg színesek. Az érdeklődők [13] internetcímen tekinthetik meg az eredeti ábrákat.

1. Geometriai optikai leírás

1.1. Descartes-elmélet

A 2. ábrán látható, ahogy a vízcseppre érkező fénynyaláb egy része visszaverődik a csepp külső felületéről, egy bizonyos része megtörik, majd keresztül haladva a vízcseppben ismételt töréssel kilép abból, illetve más része a vízcsepp belső felületén egyszer (esetleg többször) visszaverődik. A vízcseppben



2. ábra. A fénysugár vagy visszaverődik a vízcsepp felületén ($p = 0$), vagy keresztül halad a cseppben ($p = 1$), vagy egyszeres (esetleg többszörös) belső visszaverődést szenved a cseppben belül ($p = 2, 3, \dots$).

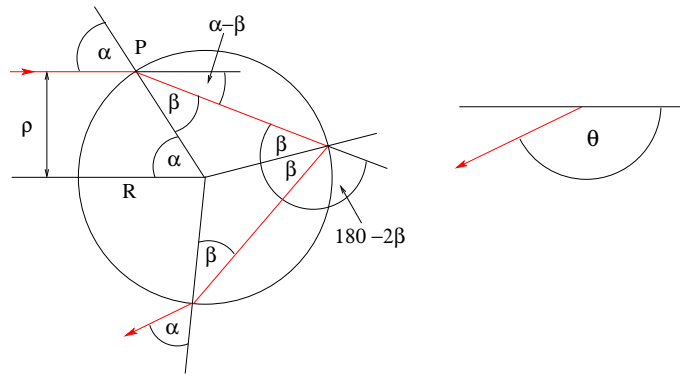
belül haladó fénysugár a csepp belső felületén történő $p - 1$ számú visszaverődés során p darab húrmentén halad. Fő- és mellékszivárványra $p = 2$, illetve $p = 3$, és a továbbiakban p -ed rendű szivárványról akkor beszélünk, amikor a vízcseppben belül a hurok száma p . Később látni fogjuk, hogy szivárvány csak $p > 1$ esetén lehetséges. Míg a természetben $p > 3$ rendű szivárványt nem figyeltek meg, *Billet*-nek már 1868-ban sikerült kimutatni a 20-ad rendű szivárványt is vékony vízszugarat megvilágítva (a hivatkozás megtalálható *Walker* [14] cikkében).

Tekintsük a 3. ábrának megfelelő R sugarú, n törésmutatójú vízcseppbe ϱ ütközési (*impakt*) paraméterrel vízszintes irányból érkező fénysugár menetét a főszivárványra ($p = 2$)! A beesés szögére igaz, hogy $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Az ábra alapján világos, hogy $\varrho = R \sin \alpha$, másrészt a P pontban az (1) Snellius–Descartes-törvény szerint: $\sin \alpha = n \sin \beta$. A vízcseppbe bemenő és abból kilépő fénysugarak közti eltérülés szöge (továbbiakban szórási szögnek nevezzük): $\theta = (\alpha - \beta) + (\pi - 2\beta) + (\alpha - \beta) = \pi + 2\alpha - 4\beta$. A Napból jövő és a szemünkbe érkező fénysugarak közti szög: $\pi - \theta = 4\beta - 2\alpha$ (Bacon a kísérleteiben ezt a szöveget mérte ki). Teljesen hasonló számítással kapható a szórási szög abban az általános esetben is, amikor a vízcsepp belső falán a fénysugár többször visszaverődik. Könnyen belátható, hogy a szórási szög $p - 1$ számú belső visszaverődés esetén: $\theta = (\alpha - \beta) + (p - 1)(\pi - 2\beta) + (\alpha - \beta) = (p - 1)\pi + 2\alpha - 2p\beta$. Az (1) egyenletet felhasználva a θ szöveget kifejezhetjük a

$$b = \frac{\varrho}{R} = \sin \alpha \quad (2)$$

dimenziótlan ütközési paraméterrel:

$$\theta = (p - 1)\pi + 2 \arcsin b - 2p \arcsin \frac{b}{n}. \quad (3)$$

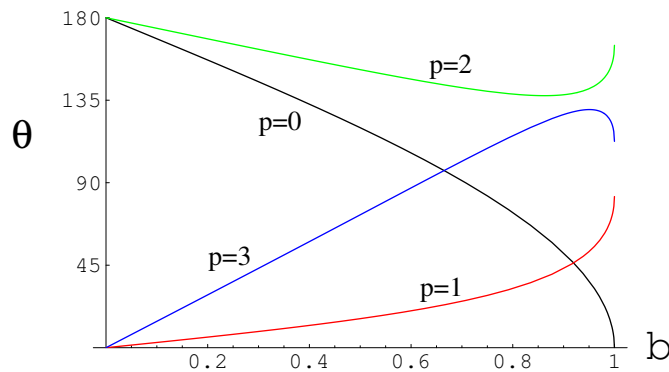


3. ábra. A vízszintes irányból belépő fénysugár menete a vízcseppben és a szögviszonyok a főszivárványban.

A fenti képlet szerint θ nagyobb lehet π -nél, ezért a gyakorlati számításoknál a θ szöget a $(0, \pi)$ intervallumba képezzük:

$$\theta \rightarrow \begin{cases} \theta - 2\pi j, & \text{ha } 2\pi j \leq \theta \leq 2\pi(j + 1/2), \\ 2\pi(j + 1) - \theta, & \text{ha } 2\pi(j + 1/2) \leq \theta \leq 2\pi(j + 1), \end{cases} \quad (4)$$

ahol j egész szám. (Hasznos tanács: numerikus számításoknál bármely x szöget az $\arccos(\cos(x))$ függvénnyel könnyedén képezhetjük a $(0, \pi)$ intervallumba.) A 4. ábra a θ szórási szögeknek a b ütközési paramétertől való függését mutatja $p = 0, 1, 2, 3$ értékekre. Két fontos megállapítás tehető



4. ábra. A θ szórási szög a $b = \rho/R = \sin \alpha$ dimenziótlan ütközési paraméter függvényében $p = 0, 1, 2, 3$ értékekre.

a 4. ábra alapján. Egyrészt látható, hogy $p > 0$ esetén θ értéke $b = 1$ -nél (azaz vízcsepp felszínéhez érintőlegesen érkező fénysugár esetén) zérustól különböző érték:

$$\theta^* = \theta(b = 1) = p(\pi - 2\alpha_h), \quad (5)$$

ahol α_h a vízre vonatkozó teljes visszaverődés határszöge, azaz $\sin \alpha_h = 1/n$. Későbbiekben látni fogjuk, hogy a θ^* szögnek fontos szerepe lesz a szórási hatáskeresztmetszet számításában és az interferencia-jelenségek vizsgálatában is.

A másik fontos tény, ami világosan látható a 4. ábrából, hogy a θ szórási szögnek $p > 1$ esetén szélsőértéke van b függvényében. A továbbiakban szükségünk lesz θ -nak a b szerinti első deriváltjára, melyet könnyen megkaphatunk a (3) képletből:

$$\frac{d\theta}{db} = 2 \left(1 - \frac{p \cos \alpha}{n \cos \beta} \right) \frac{1}{\cos \alpha}. \quad (6)$$

színek	n	$\pi - \theta_c$	
		p=2	p=3
vörös	1,330	42,5°	50,1°
zöld	1,335	41,8°	51,4°
kék	1,340	41,1°	52,7°

1. táblázat. A fő- és mellékszivárvány esetén a különböző színű fénysugarak $\pi - \theta_c$ szögben láthatók.

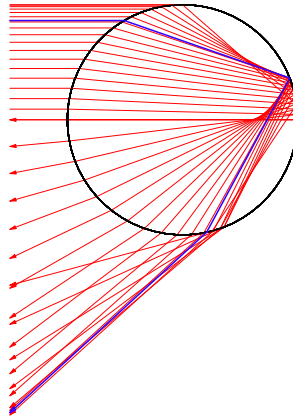
A szélsőérték helye a $d\theta/db = 0$ feltételből adódik:

$$b_c \equiv \sin \alpha_c = \sqrt{\frac{p^2 - n^2}{p^2 - 1}}. \quad (7)$$

Később igazolni fogjuk azt a — már ezen szélsőérték-számítás során kialakuló — sejtést, hogy a szivárványból kilépő legintenzívebb fénysugár az α_c beesési szögben érkezik a vízcsepphez. Ezt a speciális sugármenetet az irodalomban szokásos módon, és Descartes tiszteletére, nevének latin megfelelője szerint *Cartesius-sugárnak* nevezzük és a c index is a Cartesius névre utal. Kiszámíthatjuk a θ szórási szöget is ezen szélsőérték helyen:

$$\theta_c = \theta(b = b_c). \quad (8)$$

Az 5. ábrán különböző ütközési paraméterrel beérkező párhuzamos fénysugaraknak a geometriai optika alapján számolt menete látható. A vastag vonal a Cartesius-sugármenetet jelöli. A Cartesius-



5. ábra. Különböző beesési szöggel érkező párhuzamos fénysugaraknak a geometriai optika alapján számolt sugármenete. A vastag vonal a Cartesius-sugármenetet jelöli.

sugármenet közelében beeső párhuzamos sugarak a vízcseppből kilépve közel párhuzamosak maradnak, ami egy erősen kollimált nyalábot eredményez. Más esetekben a nyaláb a vízcseppből kilépve szétszóródik. Így a Cartesius-sugármenetnek kitüntetett szerepe van. A szivárványt ebből az irányból látjuk legintenzívebbnek. Az 1. táblázatban összefoglaltuk a különböző színek esetére (az 1. ábra feliratában megadott törésmutatókkal) számolt $\pi - \theta_c$ szögeket. Látható, hogy fő- és mellékszivárványban a színek sorrendje fordított. Csak érdekességképpen jegyezzük meg, hogy az 1. ábrán látható mellékszivárványnál a vízcseppben belül a Cartesius-sugár nagyon jó közelítéssel egy négyzet oldaléle mentén halad.

A továbbiakban a kvalitatív megállapításon túl, matematikailag is megmutatjuk, hogy a vízcseppről szóródó különböző színű fény a fenti szögekben látható a legerősebb intenzitással. A kilépő

fény intenzitását egyrészt a vízcseppen történő szóródási folyamat, másrészt a fény polarizációja határozza meg. Az előbbi jelenséget, a mai modern elméletek alapján, a szórócentrum differenciális hatáskeresztmetszetével szokás vizsgálni. Egy adott térszögbe szóródó fény intenzitása arányos a szórócentrum differenciális hatáskeresztmetszetével. Így a Descartes-elmélet keretein belül a klasszikus hatáskeresztmetszet szögfüggése ad választ arra a kérdésre, hogy milyen irányból látjuk a szivárványt.

A polarizáció szerepét csak a fény tranzverzális hullámtermészetének felfedezése után ismerték fel. Egy törőfelületen a beeső fény egy része a polarizációtól függő mértékben visszaverődik, másik része megtörik. A visszavert és a megtört nyaláb intenzitása a beesés szögétől függ. A polarizációról a későbbiekben még részletesebben szólunk. A fény polarizációjának figyelembevételével a Descartes-féle elméleten. Amint azt látni fogjuk, a szivárvány szögének kiszámításához elegendő a klasszikus hatáskeresztmetszet ismerete, nincs szükség a polarizációra. Ezért lehetett a Descartes-elmélet olyan sikeres már a polarizáció felfedezése előtt is. Azonban a kilépő fény intenzitásának pontos szögfüggését csak a fény hullámtermészetére jellemző interferencia-képesség és polarizáció figyelembevételével együtt határozhatjuk meg. A későbbiekben összehasonlítjuk a Descartes-elméletet azokkal az elméletekkel, melyekben a fény hullámtermészetét is számításba vették. Előtte azonban, ismertetjük a szórási szöget meghatározó klasszikus hatáskeresztmetszet kiszámításának alapjait.

1.2. A klasszikus szórási hatáskeresztmetszet

A fény vízcseppen való szóródását a *differenciális hatáskeresztmetszettel* célszerű jellemezni. A klasszikus hatáskeresztmetszet definíciója megtalálható például a [15] könyvben. Idézzük fel röviden a klasszikus hatáskeresztmetszet definícióját a vízcseppeken való fényszóródás kapcsán! A vízcsepphez a Napról párhuzamos fénynyaláb érkezik, azaz nem egyedi fénysugarak eltérülését kell vizsgálni. Jelölje dI annak a fénynyalábnak az intenzitását (részecskék szórásánál a részecskék számát), ami a θ és $\theta + d\theta$ szög közé szóródik. (Az adott szögtartományba szóródó energiát a szórócentrum körre rajzolt egységnyi sugarú gömb felületén vett intenzitással mérik.) Ha a bejövő párhuzamos fénysugarakra merőleges keresztmetszeten, egységnyi felületen áthaladó nyaláb intenzitása S_0 , akkor a θ irányba szóródó sugarak differenciális hatáskeresztmetszete definíció szerint $d\sigma(\theta) = \frac{dI}{S_0}$. Ez egy terület dimenziójú mennyiség. Először tegyük fel, hogy a θ szórási szög és a ϱ ütközési paraméter között kölcsönösen egyértelmű a kapcsolat, azaz θ az ütközési paraméter monoton függvénye². A $\varrho(\theta)$ és $\varrho(\theta) + d\varrho(\theta)$ sugarak által határolt körgyűrűn áthaladó fénynyaláb intenzitása $dI = 2\pi\varrho d\varrho S_0$. Így a differenciális hatáskeresztmetszet $d\sigma = 2\pi\varrho d\varrho$, ami kifejezhető a szóródás θ szögével, vagy a $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ térszöggel:

$$d\sigma = 2\pi\varrho(\theta) \left| \frac{d\varrho(\theta)}{d\theta} \right| d\theta = \frac{\varrho(\theta)}{\sin \theta} \left| \frac{d\varrho(\theta)}{d\theta} \right| d\Omega. \quad (9)$$

A képletben a $d\varrho/d\theta$ derivált abszolút értéke szerepel, figyelembe véve, hogy a derivált negatív is lehet. Ha a $\varrho(\theta)$ többértékű függvény (mint például a szivárványnál), akkor a függvény egyes ágainak megfelelően, külön-külön kell kiszámítani az egyes járulékokat a differenciális hatáskeresztmetszethez. Általában a θ szórási szöget ismerjük a ϱ ütközési paraméter függvényében. Ezért először a (9) képlet szerint meg kell határozni a $\theta(\varrho)$ függvény inverzét, azaz a $\varrho(\theta)$ függvényt, majd ennek deriváltját.

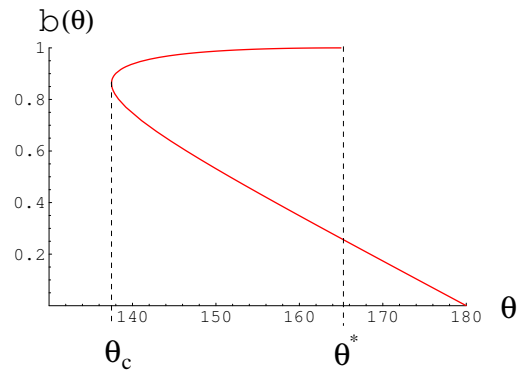
Vizsgáljuk a főszivárvány ($p = 2$) esetét³! A (3) egyenletben megadott $\theta(\varrho)$ függvény inverzét, algebrai átalakítások után, a következő egyenletből kaphatjuk meg:

$$\left(\frac{b^2}{n^2} - \frac{1}{2} - \frac{b}{2} \sin \frac{\theta}{2} \right)^2 = \frac{1 - b^2}{4} \cos^2 \frac{\theta}{2}. \quad (10)$$

²Szórási jelenségeknél gyakran fordul elő, hogy ez a függvény nem monoton. Például szivárványnál ($p > 1$) a 4. ábra alapján jól látható, hogy éppen ez a helyzet. Ilyenkor a függvényt felbontjuk monoton függvények ágaira.

³Itt jegyezzük meg, hogy $p = 0$ és $p = 1$ mellett a hatáskeresztmetszet analitikusan kiszámolható, a részletek megtalálhatók a [15] könyvben a 73. és a 80. oldalon.

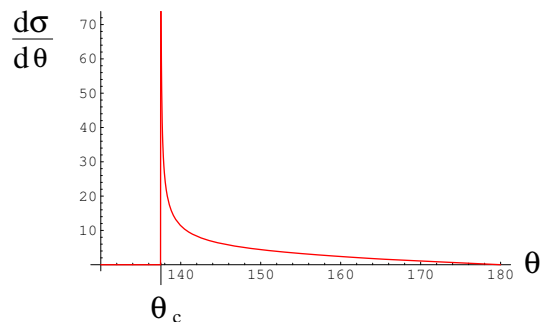
Ez egy negyedfokú egyenlet $b = \varrho/R$ -re, és két pozitív gyöke van (a másik kettő negatív gyök). Jelöljük az így kapott inverz függvényt $b(\theta)$ -val! A függvény kétértékű és alakját a 6. ábra mutatja⁴. A $b(\theta)$ függvény θ szerinti deriváltja, az inverz függvény deriválásának megfelelő szabály szerint, a (6)



6. ábra. A $\theta(b)$ függvény inverze, azaz a $b(\theta)$ dimenziótlan ütközési paraméter a θ szórási szög (fokokban mérve) függvényében főszivárvány és vörös szín esetén. A függvény kétértékű és értelmezési tartománya az alsó ágra a $[\theta_c, \pi]$, míg a felső ágra a $[\theta_c, \theta^*]$ intervallum, ahol θ^* értékét az (5) képlet adja.

egyenletben adott derivált reciproka. A $db(\theta)/d\theta$ derivált értéke a $b(\theta)$ függvény két ágán különböző, sőt ellentétes előjelűek (ezért kell venni az abszolút értéket a (9) képletben). Így a differenciális hatáskeresztmetszethez külön-külön adódnak járulékok az egyes ágakból.

Világos, hogy a $db(\theta)/d\theta$ derivált a $\theta = \theta_c$ helyen *szinguláris* (végtelen értéket vesz fel), és így a differenciális hatáskeresztmetszet ebben az irányban *végtelenné* válik. Ez az oka, hogy a szórt fényt ebben a θ_c szögben látjuk a legerősebbnek. Vörös színre a differenciális hatáskeresztmetszet a 7. ábrán látható. Megjegyezzük, hogy a hatáskeresztmetszetben fellépő szingularitás *gyökös* jellegű, azaz



7. ábra. A $d\sigma/d\theta$ differenciális hatáskeresztmetszet (R^2 egységekben) a θ szórási szög (fokokban mérve) függvényében főszivárvány és vörös szín esetén. A függvénynek gyökös szingularitása van a θ_c helyen, és értéke zérus ennél kisebb θ szögekre.

$db(\theta)/d\theta \sim 1/\sqrt{\theta - \theta_c}$ szerint közelíthető θ_c közelében. Természetesen a teljes hatáskeresztmetszet, azaz az $\int_0^\pi \frac{d\sigma}{d\theta} d\theta$ mennyiség egyenlő a πR^2 geometriai keresztmetszettel. Matematikailag az integrál a gyökös szingularitás miatt lesz véges. Teljesen hasonló gondolatmenet alapján belátható, hogy mellékszivárványra $b(\theta)$ inverz függvény deriváltja a $p = 3$ -nak megfelelő θ_c értéknél válik végtelenné, és így a hatáskeresztmetszet is.

Összegezve, a szivárvány színeit azokban az irányokban látjuk legerősebbnek, amelyekben az egyes színekhez tartozó differenciális hatáskeresztmetszetek szingulárisak. Ezeket a szögeket a fő- és mellékszivárvány esetében a (8) képletből számolhatjuk ki, és numerikus értékei az 1. táblázatban találhatóak. Mivel a (3) képletben adott $\theta(b)$ függvénynek csak $p > 1$ mellett van szélsőértéke,

⁴A $b(\theta)$ függvényt geometriailag a 4. ábrán látható $\theta(b)$ függvénynek a 45° -os egyenesre való tükrözésével kaphatjuk meg.

szivárványt csak ekkor figyelhetünk meg. A magasabb rendű szivárványokra ($p > 3$) a differenciális hatáskeresztmetszetet az előbbiekhöz hasonlóan, általában csak numerikusan határozhatjuk meg.

Itt jegyezzük meg, hogy a 4. ábra alapján főszivárványra, adott színű fényre a θ szórási szög nagyobb a $p = 2$ -nek megfelelő θ_c -nél, míg a mellékszivárvány esetén a szórási szög kisebb a $p = 3$ -nak megfelelő θ_c -nél. Mivel $\theta_c(p = 3) < \theta_c(p = 2)$, e két szög közti irányokból az adott színű fény sem a főszivárványból, sem a mellékszivárványból nem juthat a szemünkbe. A két szög közti irányban, a fő- és mellékszivárvány között egy sötét tartomány alakul ki, a bevezetőben említett *Alexander-féle sötét sáv*. Az 1. táblázatból látható, hogy $\pi - \theta_c$ értéke főszivárvány esetén vörös színre a legnagyobb, mellékszivárványnál pedig vörös színre a legkisebb. Így az 1. táblázat numerikus adataival az Alexander-féle sötét sáv a $42,5^\circ$ és az $50,1^\circ$ szögek közti irányban látható.

Végül fontos hangsúlyozni, hogy a Descartes-féle elmélet szerint a szórt fény intenzitása nem függ a vízcsepp méretétől és a fény hullámhosszától. A szivárvány jelenségének megértésében tovább lépés Descartes után közel kétszáz évvel következett be. Az új elméletekben a fénynek korábban ismeretlen tulajdonsága, a *hullámtermészete* kap alapvető szerepet. Ezek az elméletek, a szivárvány pontosabb leírásán túl, nagy hatással voltak az egész optika tudományára is. A következő fejezetben a szivárványnak a fény hullámtermészetén alapuló elméleteit ismertetjük.

2. A szivárvány és a fény hullámtermészete

Közismert a fény két alapvető, a fény tranzverzális hullámtermészetéből fakadó tulajdonsága. Az egyik a fény polarizációja, a másik az interferencia-képessége. A szivárvány jelenségének jobb megértésében nem tekinthetünk el a fénynek e két tulajdonságától. Történeti szempontból ezen a téren az első előrelépés a csodagyerek *Thomas Young* nevéhez fűződik, aki a szivárványnak a fénysugarak *interferenciájára* épülő elméletét 1804-ben dolgozta ki. Röviddel ezután, 1808-ban a francia *Étienne-Louis Malus* mérnöknek, és tőle függetlenül 1815-ben az angol *David Brewster*nek a polarizációval kapcsolatos megfigyelései rámutattak Young elméletének hiányosságaira. A polarizáció jelenségét később *Augustin-Jean Fresnel* is tanulmányozta, és ő közölte 1817-ben a róla elnevezett *Fresnel-formulákat*. A Young-elmélet döntő cáfolatát végül 1838-ban *Airy* adta meg, aki a szivárványt *elhajlási* (diffrakció) jelenségként értelmezte. Mindenesetre, Young úttörő szerepe vitathatatlan, hiszen a Newton óta kialakult vitában, miszerint a fény részecske vagy hullámtermészetű, az ő munkássága meghatározó jelentőségűnek számított. A kérdésről kitűnő történeti áttekintés található Simonyi könyvében [5]. Ugyanakkor, az Airy-elmélet sem tartalmazta a fény polarizációját, és a későbbi kutatások alapján kiderült ennek az elméletnek a közelítő jellege, és az érvényességi határa is.

Ebben a fejezetben áttekintjük a szivárvány jelenségében a polarizáció szerepét, majd a hazai irodalomban kevésbé ismert Young- és Airy-elmélet alapjait ismertetjük, és szólunk azok hiányosságairól is. Talán elfogultság nélkül állíthatjuk, hogy Young és különösen Airy elmélete tudománytörténetileg is nagyszerű szellemi teljesítménynek tekinthető, és így azok részletesebb bemutatása nem hiábavaló.

2.1. A polarizáció

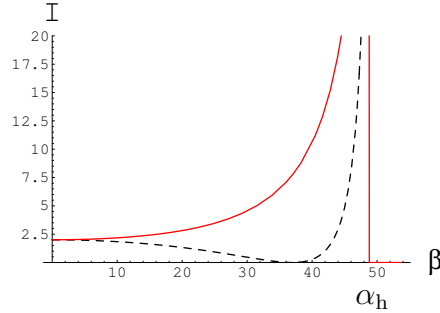
A fény egyik fontos jellemzője a polarizáció. A fény transzverzális hullám, melyben mind az elektromos, mind a mágneses tér merőleges a fény terjedésének irányára. Egy törőfelületre érkező fénysugár elektromos térerőssége mindig felbontható a beesési síkkal párhuzamos és arra merőleges komponensre. Általánosan a fény e két független polarizáció „keveréke”. Például a napfényben a kétféle polarizáció egyenlő mértékben, véletlenszerűen van jelen, ezt polarizálatlan vagy „természetes” fénynek is szokás nevezni. A visszavert fénysugár intenzitása a párhuzamosan és merőlegesen polarizált

fényre a Fresnel-formulák alapján (lásd például [16, 17]):

$$I_{\parallel} = I_0^{\parallel} \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}^2(\alpha + \beta)}, \quad (11)$$

$$I_{\perp} = I_0^{\perp} \frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)}, \quad (12)$$

ahol I_0^{\parallel} és I_0^{\perp} a bejövő fény intenzitása párhuzamosan, illetve merőlegesen polarizált fényre, α és β pedig a beesési és a törési szög, melyek teljesítik az (1) Snellius–Descartes-törvényt. A 8. ábra mutatja a visszavert fény intenzitását β függvényében a kétféle polarizációnál. Az ábrán látható,



8. ábra. A visszavert fény I intenzitása (%-ban) merőlegesen (folytonos vonal) és párhuzamosan (szaggatott vonal) polarizált vörös színű fényre a β törőszög (fokokban mérve) függvényében. A függőleges vonal a görbék értelmezési tartományának határát, a teljes visszaverődés α_h határszögét jelöli.

hogy párhuzamosan polarizált fény esetén a visszavert fény intenzitása egy bizonyos β_B szögnél zérussá válik. Ennek oka, hogy a (11) képlet nevezője végtelen, ha $\alpha + \beta = \pi/2$. Felhasználva az (1) Snellius–Descartes-törvényt azt kapjuk, hogy az ún. $\beta_B = \operatorname{arctg} n$ Brewster-szögnél lesz a visszaverődő párhuzamosan polarizált fény intenzitása zérus. A három alapszínre a Brewster-szög: $\beta_B = 36,9^\circ$ (kék); $36,8^\circ$ (zöld); $36,7^\circ$ (vörös).

Az 1. táblázatban megadott törésmutatók alapján a teljes visszaverődés kék, zöld és vörös színeknek megfelelő határszögei: $\alpha_h = \operatorname{arcsin} \frac{1}{n} = 48,8^\circ$; $48,5^\circ$; $48,3^\circ$. A 3. ábra szerinti β szög Cartesius-sugármenetre és főszivárványra a három színnek megfelelően rendre a $\beta_2 = 40,4^\circ$ (kék); $40,1^\circ$ (zöld); $39,8^\circ$ (vörös) értékeket veszi fel (a 2-es index $p = 2$ -re utal). Innen látszik, hogy egyik esetben sem lép fel teljes visszaverődés a vízcsepp határán. Hasonló a helyzet mellékszivárványra is, ekkor a három alapszínre $\beta_3 = 45,6^\circ$ (kék); $45,4^\circ$ (zöld); $45,1^\circ$ (vörös). Mivel a vízcseppen belül nincs teljes visszaverődés, az észlelt kilépő fény intenzitása jelentősen lecsökken a bejövőhöz képest. Látható, hogy a β_2 szög Cartesius-sugármenetre és főszivárványra közel esik a fenti Brewster-szögekhez. Így a párhuzamosan polarizált fény intenzitása jóval kisebb a merőlegesen polarizálthoz képest.

A vízcseppből kilépő fényben a kétfajta polarizáció arányát meghatározhatjuk például a polarizálatlan napfény esetében. Feltehetjük, hogy a bejövő egységnyi intenzitású fényben a párhuzamosan és merőlegesen polarizált rész intenzitása azonos. A (11) és (12) Fresnel-formulákat használva a fénynek a vízcsepp felületén való törése, $p - 1$ számú visszaverődése, és ismételt fénytörése után a kilépő fény intenzitásának aránya a bejövőhöz képest:

$$\begin{aligned} I &= I_{\parallel} + I_{\perp}, \quad \text{ahol} \\ I_{\parallel} &= \left[1 - \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}^2(\alpha + \beta)} \right]^2 \left(\frac{\operatorname{tg}^2(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}^2(\alpha + \beta)} \right)^{p-1}, \\ I_{\perp} &= \left[1 - \frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)} \right]^2 \left(\frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)} \right)^{p-1}. \end{aligned} \quad (13)$$

A képletek alapján Cartesius-sugarmentet és főszivárvány esetén merőlegesen polarizált fényre a kilépő és belépő fénysugár intenzitásának aránya kb. 9 %, míg párhuzamosan polarizált fényre ez az érték 0,4 %. Így a szivárványból szemünkbe gyakorlatilag csak merőlegesen polarizált fénysugarak érkeznek. Egy lineáris polárszűrőn keresztül nézve a szivárvány egy-egy szakasza eltűnik, ha a polárszűrőt 90° -kal elforgatjuk.

A szivárvány polarizációs sajátságainak mérése meglehetősen függ a szerencsétől, mivel a tünevény észlelhetősége megjósolhatatlan. Egy szivárvány fölbukkanásakor általában nincs kéznél polariméter, mikor pedig van nálunk polariméter, akkor meg többnyire nincs szivárvány. Így szabályosan vadászni kell rá, miközben magunkkal hurcoljuk a polariméterünket. Ez az oka annak, hogy csak 2003-ban sikerült először képalkotó „polarimétervégre” kapni egy szivárványt [18, 19], amikor 180° látószögű képalkotó polarimetriával elkészült egy tengerparti kettős ívű (fő és mellék) szivárvány polarizációs mintázata a spektrum vörös, zöld és kék tartományában. Ennek elemzésével számos korábbi számítás helyességét lehetett „látványosan” igazolni.

A szivárványból a szemünkbe érkező fény intenzitásának szögfüggéséhez a differenciális hatás keresztmetszetet meg kell szorozni a (13) polarizációs tényezővel. Ugyanakkor a szivárványnak a (8) képlettel adott szöge változatlan, hiszen a differenciális hatás keresztmetszet szingularitásának helyét a polarizációs tényező nem módosítja.

A vízcseppből kilépő fény intenzitása a (13) szerinti polarizációs tényező miatt hatványszerűen csökken p növelésével. Ezért a természetben a magasabb rendű szivárványokat ($p > 3$) nehezen figyelhetjük meg. Ráadásul az égbolt háttérének fénye, illetve a vízcsepp felületéről közvetlenül ($p = 0$) és a vízcseppen áthaladó ($p = 1$) fény intenzitása is elnyomja a magasabb rendű szivárványok intenzitását. A Descartes-féle intenzitásfüggvényt illetően további részletek találhatóak például Walker cikkében [14].

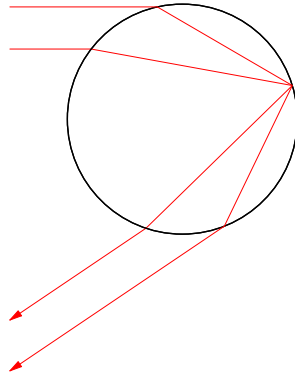
2.2. Járolékos szivárvány: Young-elmélet

A bevezetőben említettük, hogy időnként a főszivárvány belső köríve alatt ún. járulékos szivárványt is megfigyelhetünk. Mivel nagyon ritkán láthatunk hasonló járulékos köríveket mellékszivárványban, csak a főszivárvánnyal kapcsolatos jelenséget vizsgáljuk. Elsőként Thomas Young, 1804-ben adott magyarázatot a járulékos szivárványra. Sajnos a Young elméletéből kapott intenzitásnak a szögfüggése nincs összhangban a megfigyelésekkel. Erről a későbbiekben részletesen szólnunk. Ennek ellenére, a járulékos szivárvány alapvetően csak az interferenciák figyelembevételével magyarázható. Young eredményei, illetve azoknak fogyatékosága alapvetően befolyásolták a szivárvány jelenségének, és az egész optikának a kutatási irányvonalát. Ezért ebben a részben röviden vázoljuk Young elméletének lényegét.

Korábban láttuk, hogy adott θ szórási szöghöz két különböző ütközési paraméter tartozik, ha $\theta_c \leq \theta \leq \theta^*$ (lásd a 6. ábrát). Jelöljük ezt a két, θ szögtől függő, ütközési paramétert b_A -val, illetve b_B -vel! Ezek a $b(\theta)$ inverz függvény két ágához tartozó értékek. E két ütközési paraméterrel bejövő párhuzamos fénysugarak a vízcseppből ismét párhuzamosan lépnek ki, hiszen mindkét fénysugárnak a szórási szöge θ . A 9. ábra két ilyen fénysugár menetét mutatja. Az ábrából látható, hogy a két fénysugár egy pontban verődik vissza a vízcsepp felületéről. Valóban a 3. ábra alapján könnyű belátni, hogy ezen a ponton és a kör középpontján átmenő egyenes a bejövő (vízszintes) fénysugárral $2\beta - \alpha = (\pi - \theta)/2$ szöget zár be. Mivel a két fénysugárra a θ szög azonos, a két fénysugár visszaverődése a vízcsepp ugyanazon pontján történik. Kiszámíthatjuk e két fénysugár közti optikai útkülönbséget is, azaz a b_A és b_B ütközési paraméterektől függő valóságos útkülönbségek és a vízcsepp törésmutatójának szorzatát. A 9. ábra alapján egyszerű geometriai megfontolásokkal adott θ szórási szög mellett a d optikai útkülönbségre a következőt kapjuk:

$$d(\theta) = 2R \left(2\sqrt{n^2 - b_A^2(\theta)} - 2\sqrt{n^2 - b_B^2(\theta)} - \sqrt{1 - b_A^2(\theta)} + \sqrt{1 - b_B^2(\theta)} \right), \quad (14)$$

ahol $b_A(\theta)$ és $b_B(\theta)$ a (10) egyenlet pozitív megoldásai adott θ mellett. A fenti kifejezésben az első két

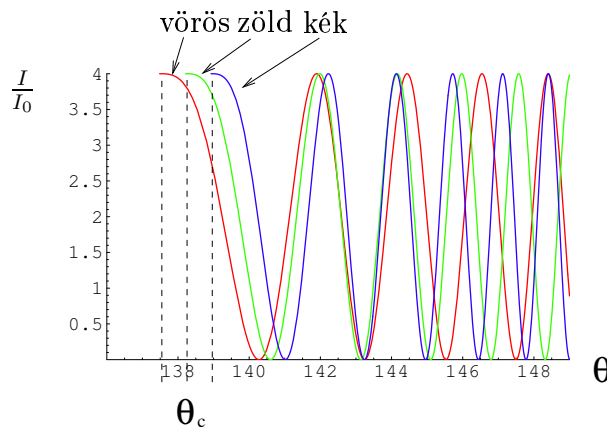


9. ábra. A két fénysugár az útkülönbség miatt interferál. Az ábra szerinti fénysugarak pályáját a vörös fényre vonatkozó törésmutatóval és $\theta = 146^\circ$ szórási szöggel számoltuk.

tag a vízcseppben, míg az utolsó két tag a levegőben haladó fénysugarak közti optikai útkülönbséget adja. A két fénysugár útkülönbségéből adódó interferenciaképpen az intenzitás θ szórási szögtől való függése:

$$\frac{I(\theta)}{2I_0} = 1 + \cos kd(\theta), \quad (15)$$

ahol I_0 a két interferáló fénysugár intenzitása (külön-külön) a vízcseppből való kilépés után, és $k = 2\pi/\lambda$ a levegőben terjedő λ hullámhosszúságú fénynek a hullámszáma. A 10. ábra a különböző színű fénysugarakra a (15) képlet alapján számolt intenzitások szórási szögtől való függését mutatja. Az ábrából látható, hogy az első maximum éppen θ_c -nél van. Ez érthető, hiszen ekkor $b_A(\theta_c) = b_B(\theta_c) = b_c$, és így az optikai útkülönbség $d(\theta) = 0$. Az adott színű járulékos ívek a további maximumok



10. ábra. Az interferáló fénysugarak intenzitása θ függvényében vörös, zöld és kék színekre (az első maximum hely egybeesik a Descartes-elmélet által megadott irányokkal). Az egyes színek hullámhosszait rendre 650; 520 és 430 nm-nek, míg a vízcsepp sugarát $R = 0,05$ mm-nek vettük. A törésmutatók az 1. ábránál találhatóak. Az intenzitás I_0 egységeken van megadva.

irányában keletkeznek. A maximumok helye függ a vízcsepp R sugarának és a fény λ hullámhosszának arányától. Az egyes maximumok annál sűrűbben követik egymást, minél nagyobb az R/λ arány. A szivárványban a vízcseppek átmérője a 0,01 mm-től néhány mm-ig változhat. Az interferenciából adódó járulékos íveket legjobban közvetlenül a főszivárvány belső köríve alatt láthatjuk. Azonban a természetben, az egyébként is igen ritka esetben, egy-két járulékos ívnél többet nem figyelhetünk meg, mert az egyes maximumoknak az intenzitása rohamosan csökken a szórási szög növekedésével. Ez abból következik, hogy a (15) képletben az I_0 intenzitás arányos a szórási hatáskeresztmetszettel, ami a 7. ábra szerint gyorsan csökken a szórási szög növekedésével és zérus az Alexander-féle sötét sávban. Az intenzitásnak ezt a csökkenését azért nem vettük számításba a 10. ábrán, hogy minél

szembeötlőbb legyen az ábra mondanivalója. A következő fejezetekben olyan eredményeket mutatunk be, ahol ezt a tényezőt és a polarizációt is figyelembe vesszük.

Az interferenciakép elmosódhat a vízcseppek különböző mérete miatt is. A kisméretű vízcseppekben az egyes színekhez tartozó interferencia-erősítések átlapolódhatnak, a szivárvány egyes járulékos ívei fehérré válnak (ha egyáltalán még elég intenzívek). A 10. ábrán például a második maximum mind a három színre közel azonos. Ezért fehérek és nem színesek a víz-felhők a szivárványszórásnak megfelelő szögekből nézve is, hiszen bennük igen apró vízcseppek vannak.

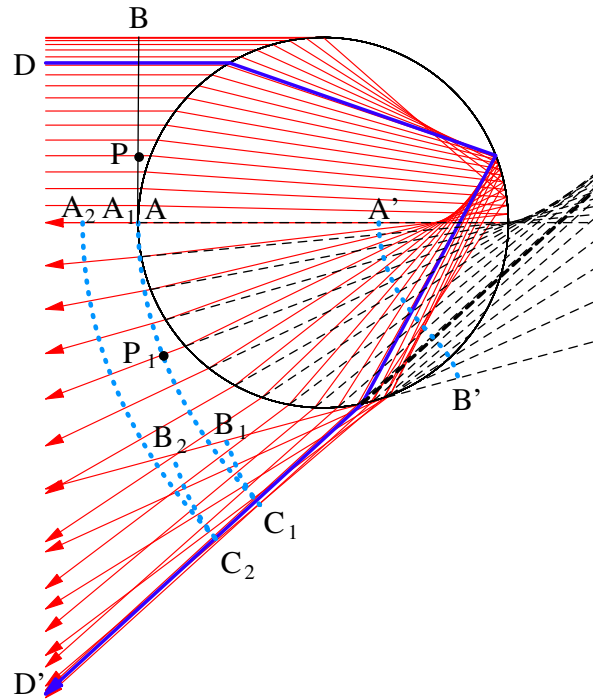
2.3. Airy-elmélet

Young interferencia-elméletével a szivárvány főbb vonásai magyarázhatók, legalábbis kvalitatíve. Azonban egy pontos matematikai elmélet a szórt fény intenzitásának a vízcsepp méretétől és a szórási szögtől való függésére még hiányzott. Young elmélete szerint az Alexander-féle sötét sávban az intenzitás zérus. Ugyanakkor a hullámelmélet szerint ilyen hirtelen változás nem léphet fel az intenzitás szögfüggésében, hiszen az elhajlás miatt a geometriai optika szerint sötét tartományba, más néven árnyéktérbe is szóródik fény. Az intenzitás az árnyéktér és a megvilágított tartomány között folytonosan változik. Az elhajlás ezen jelenségének pontos (kvantitatív) leírása meglehetősen nehéz feladat. Jelentős előrelépés 1838-ban Airy-nek köszönhető, akinek sikerült pontosabb matematikai leírást adni a szivárványról, és megalapozni az elhajlás elméletét is. A következőkben először az Airy-elmélet [20] alap gondolatát, majd annak matematikai részleteit ismertetjük.

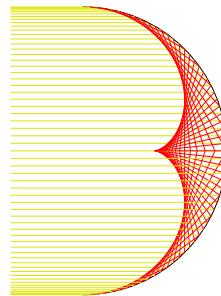
A vízcseppre különböző beesési szöggel érkező koherensnek feltételezett „fénysugarak” azonos idő után különböző utat tesznek meg. Ezért a 11. ábrán látható, a bejövő fénysugarakra merőleges AB egyenes alakú (az ábrán a bejövő síkhullám frontjának egy metszete látható) hullámfront a vízcseppből kilépve nem lesz egyenes. Kiszámítottuk, hogy miként torzul az egyenes hullámfront a vízcseppben való áthaladás után. Az ábrán a hullámfront $A_1C_1B_1$ és $A_2C_2B_2$ alakja látható két különböző időpillanatban. Az első esetben az eredeti hullámfront A pontján átmenő fénysugár a belső visszaverődés után éppen visszatér az A pontba (ez az A_1 pont), míg a második eset egy későbbi időpillanatnak felel meg. Látható, hogy a két hullámfront a C_1 , illetve a C_2 pontokban „megtörik”. Ennek jelentőségére az alábbiakban még visszatérünk. Ha a kimenő fénysugarakat visszafelé meghosszabbítjuk (az ábrán a szaggatott vonalak), akkor úgy is elképzelhetjük, mintha a kilépés után kialakult hullámfront az $A'B'$ hullámfrontból fejlődött volna ki. Ezt a hullámfrontot is az előzőekhez hasonlóan számoltuk ki, csak az $A_1C_1B_1$ hullámfront kialakulásának megfelelő időpontnál korábbi időpillanatot vettünk. A hullámfront minden elemi szakasza továbbra is merőleges lesz az adott elemi szakaszon átmenő fénysugárra.

Richard Potter, Airy cambridge-i munkatársa, vette észre 1835-ben, hogy az azonos irányból érkező és a vízcseppben áthaladó különböző fénysugarak *kausztikát* eredményeznek. A kausztika a sugármenetek burkolója, ahol a fény intenzitása mindig nagy. Az egyik legismertebb kausztika a jól megfigyelhető fényes, „csúcsos” alakú görbe, amely egy pohár alján látható, amikor a felülről beeső fény a pohár belső, tükröző faláról visszaverődik. A 12. ábrán megszerkesztettük a gömbtükörre párhuzamosan beeső fénysugarak útját a visszaverődés után. Ezeknek a fénysugaraknak a burkolója eredményezi a kausztikát. Potter megmutatta, hogy szivárványnál a Cartesius-sugármenet is egy kausztikának tekinthető. Esetünkben kétfajta kausztika létezik: egy *valós kausztika* és egy *látszólagos (virtuális) kausztika*. Ha például az A_1C_1 hullámfronton merőlegesen áthaladó fénysugarakat visszafelé meghosszabbítjuk, akkor azok burkolója a látszólagos kausztikát eredményezi. Ugyanakkor a C_1B_1 hullámfronton merőlegesen áthaladó fénysugarak burkolója a Cartesius-sugármenet, ami a valós kausztikának felel meg. A kausztikának, a szivárványhoz hasonlóan, van egy világos, illetve egy sötét tartománya, és köztük az intenzitás folytonosan változik. Így egy szivárványban a szórt fény intenzitásának kiszámítása hasonló (de nem teljesen azonos) feladat, mint a kausztikára meghatározni az intenzitás eloszlását. A kausztikára vonatkozó számítások matematikai részletei megtalálhatók például a Landau-sorozat II. kötetében a 198. oldalon [21].

Térjünk vissza a szivárvány problémájához! Airy a hullámterjedés leírásához a 17. században



11. ábra. A kezdeti AB egyenes alakú hullámfront két különböző időpillanatra kiszámított alakja: a görbült $A_1C_1B_1$ és $A_2C_2B_2$ hullámfrontok (az A_1 pont egybeesik az A ponttal). Az $A'B'$ hullámfront egy látszólagos front, a szaggatott vonalakkal jelölt sugarak hullámfrontja. Az $A_1C_1B_1$ hullámfront P_1 pontja az AB hullámfront egy tetszőleges P pontjának felel meg. A D és D' pontokon átmenő vastag vonal a Cartesius-sugármenetet jelöli.

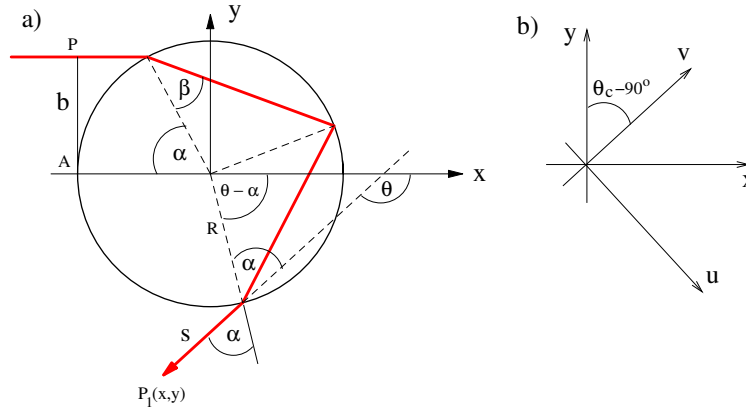


12. ábra. Homorú tükörről visszaverődő fénysugarak burkolója kausztikát eredményez.

Christiaan Huygens (később *Fresnel* által tökéletesített) elvet alkalmazta. A *Huygens-Fresnel-féle elv* szerint a hullámfront minden pontjában a hullám amplitúdója egy korábbi hullámfront összes pontjából jövő elemi gömbhullámok szuperpozíciója. Ebből következik, hogy ha ismerjük az amplitúdót egy hullámfront minden pontjában, akkor meg tudjuk határozni a tér bármely pontjában az amplitúdót. *Airy* kezdeti hullámfrontnak az $A'B'$ hullámfront közelítő alakját használta. Sajnos az amplitúdó eloszlását nem ismerjük ezen a hullámfronton, csak feltevéssel élhetünk, remélve, hogy az eredmény a valóságos helyzetnek egy jó közelítése. A legegyszerűbb feltevés, hogy az amplitúdó a hullámfront minden pontjában azonos, ami egyébként a szokásos feltevés a fényelhajlás elméletében is. Továbbiakban ismertetjük *Airy* gondolatmenetének matematikai részleteit, követve a *Humphreys könyvében* [22] található, a mai matematikai fizika nyelvezetére és lehetőségeire általunk adaptált levezetést.

A hullámterjedés matematikai tárgyalása szempontjából az $A'B'$ és az $A_1C_1B_1$ hullámfront egyenértékű. Így elegendő az utóbbi hullámfront alakját meghatározni. Tekintsük a 11. ábrán látható AB hullámfront egy tetszőleges P pontján áthaladó sugármenetet, és jelöljük ennek végpontját az $A_1C_1B_1$

hullámfronton P_1 -vel! Ez a sugármenet a 13a ábrán külön is látható (a koordináta-rendszer x tengelye egybeesik a fény beesésének irányával). Az AB hullámfront A , illetve P pontjából induló fénysugarak



13. ábra. (a) A bejövő hullámfront egy kiszemelt P pontján átmenő fénysugár az $A_1C_1B_1$ hullámfront P_1 pontjába jut el, ami legyen s távolságra a vízcsepptől. (b) Az x és y koordináta-tengelyeknek az óramutató járásával megegyező irányban $\theta_c - 90^\circ$ szöggel történő elforgatásával nyert új (u, v) koordináta-rendszer.

azonos idő alatt jutnak az $A_1C_1B_1$ hullámfront A_1 , illetve P_1 pontjába (az A_1 pont egybeesik az A ponttal). Legyen ez utóbbi pont s távolságra a vízcsepptől! A számítást az általános esetben, p -ed rendű szivárványra (azaz, ha p számú húr van a vízcseppben) végezzük el. Ekkor a 13a ábra alapján az azonos idők feltétele a következő egyenletre vezet: $R(1 - \cos \alpha) + 2npR \cos \beta + s = 4nR$, ahonnan a vízcsepp és a P_1 pont közti s távolság kifejezhető:

$$s = R [2np(1 - \cos \beta) - (1 - \cos \alpha)]. \quad (16)$$

A P_1 pont koordinátái s ismeretében felírhatók:

$$x = R \cos(\theta - \alpha) + s \cos \theta, \quad (17)$$

$$y = -R \sin(\theta - \alpha) - s \sin \theta, \quad (18)$$

ahol a θ szórási szöget a (3) egyenlet adja meg.

Később látni fogjuk, hogy az Airy-elmélet csak a Cartesius-sugármenethez közeli irányokban ad jó közelítést a szórt fény amplitúdójára. Így feltesszük, hogy a vízcseppbe belépő fénysugár beesési szöge $\alpha = \alpha_c + \varepsilon$, ahol $|\varepsilon| \ll 1$ és α_c a (7) képlettel adott Cartesius-sugár beesési szöge.

A levezetés döntő lépése, hogy a hullámfront kiszámításához a P_1 pont (17) és (18) egyenletekkel adott (x, y) koordinátáit ε -ban *harmadrendig* fejtjük sorba. A számításoknál figyelembe kell venni, hogy β , θ és s is függ az α szögön keresztül ε -tól, és így könnyen belátható, hogy a feladat meglehetősen bonyolult. A Humphreys könyvében [22] közölt levezetés is több oldalas. Szerencsére a mai, a matematikai szimbólumokat is kezelő programokkal, mint például a *Mathematica* vagy a *Maple*, ez a feladat könnyen megoldható. Az $A'B'$ hullámfront alakjának meghatározásához célszerű elforgatni a 13b ábra x és y koordináta-tengelyeit az óramutató járásával megegyező irányban $\theta_c - 90^\circ$ szöggel. Az így kapott tengelyeket jelöljük u -val és v -vel, ahogy ez a 13b ábrán látható! Mivel $\varepsilon \ll 1$, belátható, hogy a v tengely nagyon jó közelítéssel megegyezik a 11. ábrán azzal a szaggatott vonallal, amelynek meghosszabbítása átmegy a D' ponton. Ebben a koordináta-rendszerben a P_1 pont (u, v) koordinátáira ε -ban harmadrendig számolva a következőt kapjuk:

$$u = u_0 + \varepsilon R \cos \alpha_c, \quad (19)$$

$$v = v_0 - \varepsilon^3 R \frac{p^2 - 1}{3p^2} \sin \alpha_c, \quad (20)$$

ahol $u_0 = R \sin \alpha_c$ és $v_0 = 2R [(p^2 - 1) \cos \alpha_c + \frac{1}{2} - np]$. Kiküszöbölve ε -t, és felhasználva (7)-t:

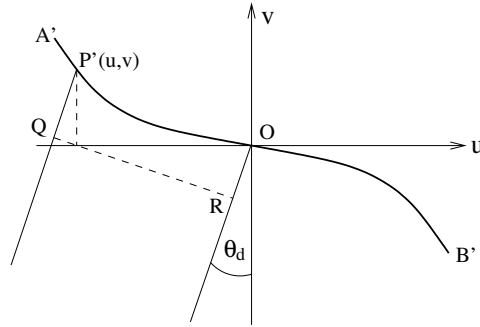
$$v - v_0 = -\frac{h}{3R^2} (u - u_0)^3, \quad (21)$$

ahol

$$h = \frac{(p^2 - 1)^2}{p^2 (n^2 - 1)} \sqrt{\frac{p^2 - n^2}{n^2 - 1}}. \quad (22)$$

Ez a hullámfront keresett, közelítő alakja. Az $v(u)$ függvény *harmadfokú polinom*. A (22) képlet szerint $n = 1,33$ nagyságú törésmutatóval számolva, $p = 2$ esetben $h = 4,98$ adódik. Ha s értékét (lásd a (16) egyenletet) úgy választjuk meg, hogy a harmadfokú polinom inflexiós pontja egybeessen az $A'B'$ látszólagos hullámfront inflexiós pontjával, akkor ε -ban harmadrendig csak u_0 és v_0 értéke fog változni a (21) képletben.

Most kiszámítjuk a $A'B'$ hullámfrontból a megfigyelőhöz érkező fényhullámok szuperpozícióját. A távoli megfigyelőhöz lényegében párhuzamos fénynyaláb érkezik, és ilyenkor a Fraunhofer-féle elhajlási képletet használhatjuk [21]. A számításhoz vegyük a koordináta-rendszer O középpontját az $A'B'$ inflexiós pontjában, ahogy ez a 14. ábrán látható. Az $A'B'$ hullámfront P' pontja az AB hullámfront egy tetszőleges P pontjának felel meg. A hullámfrontról érkező k hullámszámú síkhullám elhajlása



14. ábra. A hullámfront és a megfigyelő közti $d(\theta)$ útkülönbség: $\overline{OR} - \overline{P'Q}$. A v tengely θ_c irányba mutat, és a megfigyelő $\theta = \theta_d + \theta_c$ szögben nézi a szórt fényt.

következtében a vízcsepptől r távolságra lévő megfigyelő helyén a hullám amplitúdója:

$$A(\theta) = \frac{1}{r} \int e^{ikd(\theta)} du, \quad (23)$$

ahol $d(\theta)$ a θ irányból érkező fénysugarak útkülönbsége. Itt használtuk fel Airy hipotézisét, mely szerint az $A'B'$ hullámfront minden pontjában azonos a hullám amplitúdója (a képletben egységnyinek vettük). Ellenkező esetben a fenti integrálban megjelenne az amplitúdó ismeretlen eloszlásfüggvénye is, ami lehetetlenné tenné az integrál kiszámítását.

A 14. ábra alapján meghatározhatjuk a $d(\theta)$ útkülönbséget:

$$d(\theta) = \overline{OR} - \overline{P'Q} = (-u) \sin \theta_d - v \cos \theta_d = \frac{hu^3}{3R^2} \cos \theta_d - u \sin \theta_d, \quad (24)$$

ahol $\theta_d = \theta - \theta_c$.

Azonban még nem ismerjük az integrálási tartomány határait. Az integrál értékéhez jelentősebb járulékot csak abban az esetben kapunk, ha $d(\theta)$ nem tér el lényegesen a fény hullámhosszától. Legyen a hullámfront u koordinátájú pontjához közeli, két egymástól δu távolságra lévő pontjából érkező fénysugárnak a megfigyelőtől mért útkülönbsége $d(\theta) = \lambda/2$. Ekkor ezek a fénysugarak a megfigyelőnél kioltják egymást, és a (24) képlet alapján $\delta u \approx \lambda R^2 / (2hu^2)$. Azt látjuk, hogy u növekedésével a hullámfrontnak az a δu -nak megfelelő része, ami az interferenciában már kioltást

eredményez, u^2 -tel arányosan csökken. Például $R = 1$ mm-t, $\lambda = 500$ nm-t véve még $u = 0,1$ mm-nél is $\delta u = 5 \mu\text{m}$ adódik. Így az integrál értékéhez csak az $u = 0$ pont közvetlen környezete ad jelentős járulékot, az $A'B'$ görbe távolabbi részei nem. Ez az érték tehát jó közelítéssel független a görbe A' és B' végpontjának helyzetétől, ezért e pontok helyzetét nem is szükséges ténylegesen kiszámítanunk. Ehelyett az integrálás határait, az integrál értékének lényeges megváltoztatása nélkül, kiterjeszthetjük a $-\infty$ -tól a $+\infty$ -ig.

Behelyettesítve (24)-t a (23) egyenletbe, azt kapjuk, hogy

$$A(\theta) = \frac{2\pi R/r}{[kRh \cos(\theta - \theta_c)]^{\frac{1}{3}}} Ai(z), \quad (25)$$

ahol $Ai(z)$ az Airy-függvény (korábban szivárvány-integrálnak is nevezték):

$$Ai(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} + zt\right) dt, \quad (26)$$

és

$$z = -\frac{kR \sin(\theta - \theta_c)}{[kRh \cos(\theta - \theta_c)]^{\frac{1}{3}}}. \quad (27)$$

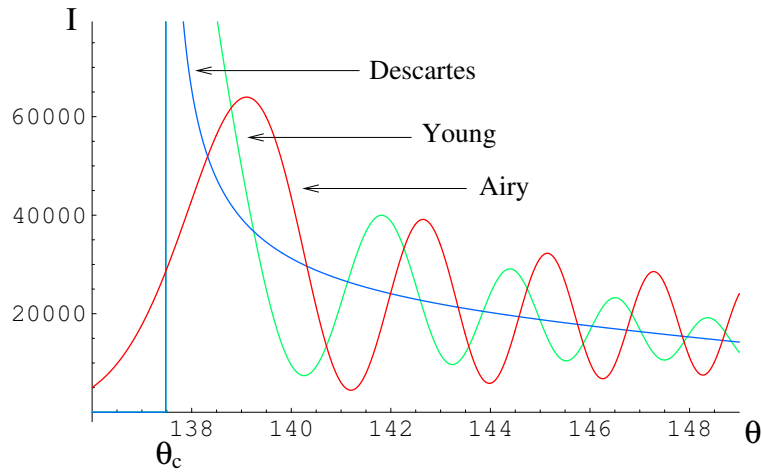
A megfigyelőnél mérhető fény intenzitása arányos $|A(\theta)|^2$ -tel (eltekintve a jelen esettől, általában az amplitudó komplex mennyiség). Mint látjuk az Airy-elméletből kapott intenzitás a kR dimenziótlan paraméteren keresztül függ a vízcsepp méretétől.

Az Airy-függvény tulajdonságaiból két fontos megállapítást tehetünk azonnal (lásd pl. [21, 23]; a két könyvben a definíció kicsit eltér, mi az utóbbit használjuk). Egyrészt a függvény — ellentétben a Descartes- és a Young-elmélettel — sehol sem szinguláris, még $\theta = \theta_c$ -nél sem ($Ai(0) \approx 0,355$). Másrészt a függvény $\theta > \theta_c$ esetén (azaz, ha $z < 0$) oszcillál, a csúcsok a járulékos szivárvány szögeinél vannak, míg $\theta < \theta_c$ -re (azaz az Alexander-féle sötét sávban) fokozatosan csökken θ csökkenésével.

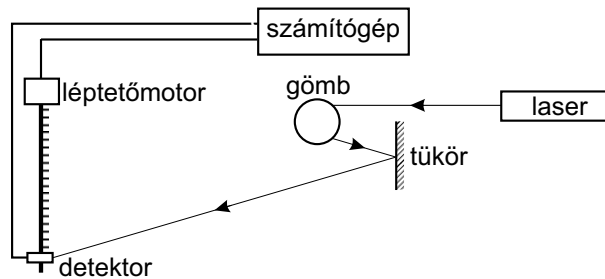
Az Airy-elmélet nem tartalmazza a polarizációs effektust. Talán hihetetlen, de ezt csak 1979-ben Können és de Boer építették be először az elméletbe [24].

Az eddig ismertett három elmélet által jósolt intenzitás szórési szögtől való függése látható a 15. ábrán. A számításokat Philip Laven programjával végeztük (a program ingyenesen letölthető az internetről [25]). A csak szögtől függő intenzitás vizsgálatához, az irodalomban szokásos módon, célszerű az intenzitást $I_0/(kr)^2$ egységekben mérni, ahol I_0 a vízcseppre érkező k hullámszámú fénynyaláb intenzitása, és r a vízcsepp és a megfigyelő közti távolság. Az ábrából jól látható, hogy az Airy-elméletből kapott első csúcs θ_1 helye kissé nagyobb a Descartes-elméletből számolt θ_c -nél. Törésmutatónak $n = 1,33$ -t véve, az első csúcsonak a hullámhossztól és a vízcsepp sugarától való függésére a következőt kapjuk: $\theta_1 - \theta_c = 0,51(\lambda/R)^{2/3}$, ami a 15. ábra adataival $1,7^\circ$ eltérést jelent. Innen látható, hogy a fény hullámhosszához képest jóval nagyobb méretű vízcseppek esetén a Descartes- és az Airy-elmélet által jósolt szórési szögek jó közelítéssel megegyeznek. A vízcsepp méretének csökkenésével az eltérés nő. A többi csúcs helyének R -függése is ugyanilyen. Ezzel függ össze az a tény, hogy a járulékos íveket mindig a főszivárvány ívének legmagasabb pontján figyelhetjük meg, ahol a vízcseppek mérete még viszonylag kicsi. Miközben a vízcsepp esik lefelé, mérete fokozatosan nő, és a csúcsok egyre sűrűbbek az intenzitásgörbében. Ugyanakkor, túlságosan kis méretű vízcseppek esetén ($R \leq 0,05$ mm) a különböző színekhez tartozó csúcsok átlapolódnak, a járulékos ívek fehérré válnak. A 15. ábrából az is szembetűnő, hogy a Young-elméletből kapott járulékos szivárvány szögei eltérnek az Airy-elméletből kapott értékektől. További érdekes részletek és mérési eredmények találhatóak Walker cikkében [14].

Az Eötvös Loránd Tudományegyetem, Szilárdtestfizika tanszék kísérleti laboratóriumában Huhn Andrásné végzett méréseket üveggömbön lézertfény segítségével. A mérés elrendezése a 16. ábrán látható. Az üveggömből szórt fény intenzitását a tükrőtől nagy távolságban egy fényelem méri, amelyet vízszintes irányban egy léptetőmotor mozgat finom lépésközzel. A 12 mW-os lézertűz



15. ábra. A Descartes-, a Young- és az Airy-elmélet összehasonlítása főszivárvány esetén. A számítás polarizálatlan, vörös színű fényre ($\lambda = 650 \text{ nm}$, $n = 1,33$) és $R = 0,05 \text{ mm}$ -es cseppszugárra vonatkozik, a polarizációs tényezőt is figyelembe véve. A Descartes-elmélet szerint, a (8) képletből $\theta_c = 137,5^\circ$ adódik főszivárványra ($p = 2$). Az I intenzitást $I_0/(kr)^2$ egységekben számoltuk, ahol I_0 a beeső k hullámszámú fény intenzitása, és r a vízcsepp és a megfigyelő közti távolság.

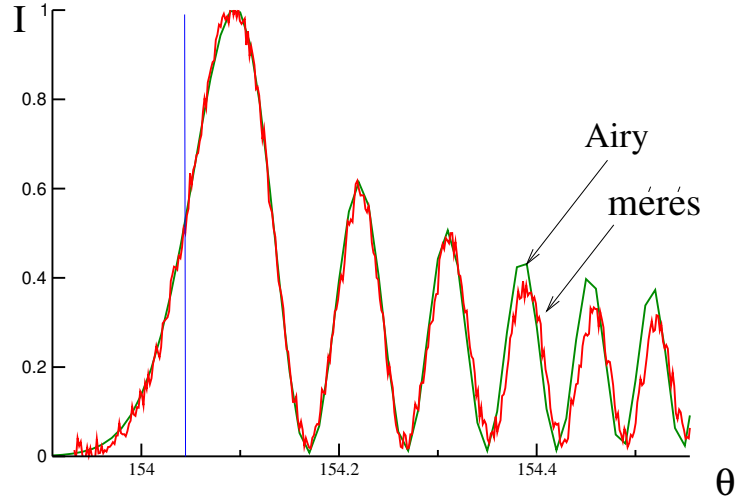


16. ábra. A mérés elrendezése.

hullámhossza 650 nm . A számítógép vezérli a motort és gyűjti a detektor jeleit. Az Airy-elmélet és a mérési eredmény összehasonlítása a 17. ábrán látható.

Összegezve, megállapíthatjuk, hogy az Airy-elméletből kapott intenzitás szórásszögfüggésében már nincs szinguláris viselkedés, és a járulékos ívek szögei is egyeznek a tapasztalattal. Később összehasonlítjuk az Airy-elméletet a következő fejezetben ismertetett, egzaktabb eredményekkel. Látni fogjuk, hogy az Airy-elmélet kvantitatíve is elég pontosan írja le a szórt fény intenzitásának szögfüggését. Jelentősebb eltérések csak kis méretű vízcseppek esetén ($R \leq 0,1 \text{ mm}$), θ_c -nél jóval nagyobb szögértékeknél, illetve magasabb rendű szivárványok esetében adódnak. A másik hiányossága az Airy-elméletnek, hogy a kezdeti hullámfront mentén az amplitúdóeloszlást egyenletesnek veszi. Ezt a problémát csak a Maxwell-egyenletek megoldásával kezelhetjük. A következő fejezetben vázoljuk azt az egzakt elméletet, amelyet a Maxwell-egyenletek alapján kapunk a szivárványra, mint szórási jelenségre.

A fejezet befejezéseként talán egyetérthetünk a következő gondolattal: csak csodálni lehet Airy tudományos előrelátását, hogy a sorfejtést harmadrendig végezte el, hiszen a fizikában leggyakrabban elegendő első rendig számolni. Munkájának értékét az is növeli, hogy a végső eredményében szereplő integrált nyilvánvalóan számítógép nélkül kellett kiszámítani.



17. ábra. Az Airy-elmélet és a mérési eredmény összehasonlítása főszivárvány ($p=2$) esetén. A számítás és a mérés polarizálatlan, vörös színű fényre ($\lambda = 650$ nm, $n = 1,467$) és $R = 5,25$ mm-re vonatkozik ($kR = 50750$). A függőleges vonal a (8) képletből számolt $\theta_c(p = 2) = 154,04^\circ$ szórési szögnek felel meg. A mért és a számolt intenzitást az első csúcs intenzitásának egységében adtuk meg.

3. Az egzakt leírás

3.1. Mie-elmélet

Az Airy-elmélet egyik dimenziótlan paramétere a kR mennyiség, ahol $k = 2\pi/\lambda$ a fény hullámszáma. Az elmélet kielégítően magyarázza a szivárvány legfontosabb jellemzőit, ha $kR \geq 5000$. Látni fogjuk, hogy az Airy-elmélet eredményei ennél kisebb értékekre már eltérnek az egzakt számításoktól, azaz ha a vízcseppek mérete kisebb 0,1 mm-nél. Rögtön felmerül a kérdés, mit tekintünk egzakt megoldásnak? Meglepő módon, Airy 1838-as eredményeit követően, fél évszázadot kellett várni a válaszra. *James Clerk Maxwell* 1862-ben megjelent *On the Physical Lines of Force* című cikkében szerepelnek először a Maxwell-egyenletek. Ezen egyenletek alapján tetszőleges méretű és törésmutatójú gömb alakú anyag fényszórására elsőként 1890-ben *Ludvig V. Lorenz* [26], majd jóval később, tőle függetlenül, 1908-ban *Gusztav Mie* [27], és egy évvel később henger alakú szórótestekre *Peter J. W. Debye* [28] vezetett le analitikus megoldást. Az irodalomban leggyakrabban, méltatlanul nem említve Lorenz és Debye nevét, az egzakt elméletet egyszerűen Mie-elméletnek nevezik.

A fizika számos területén felmerülő szórési problémának a matematikai részletei meglehetősen bonyolultak, ezért itt azokat nem ismertetjük. A Mie-elmélet matematikai részletei számos helyen megtalálhatók, mint például Born és Wolf könyvében [29], de egy tömör és jól követhető levezetés található Weiner és társai cikkében [30] is. A Mie-elmélet alapjairól magyar nyelvű összefoglalót *László István* tanulmányában [31], illetve *Mészáros Ernő* által szerkesztett könyvben [32] találhat az olvasó. Az elmélet alap gondolata a következő: a forrásmentes esetben érvényes Maxwell-egyenleteket kielégítő \mathbf{E} elektromos és \mathbf{B} mágneses tereket kifejezhetjük egy ψ skalárfüggvénnyel, amely teljesíti az alábbi Helmholtz-egyenletet:

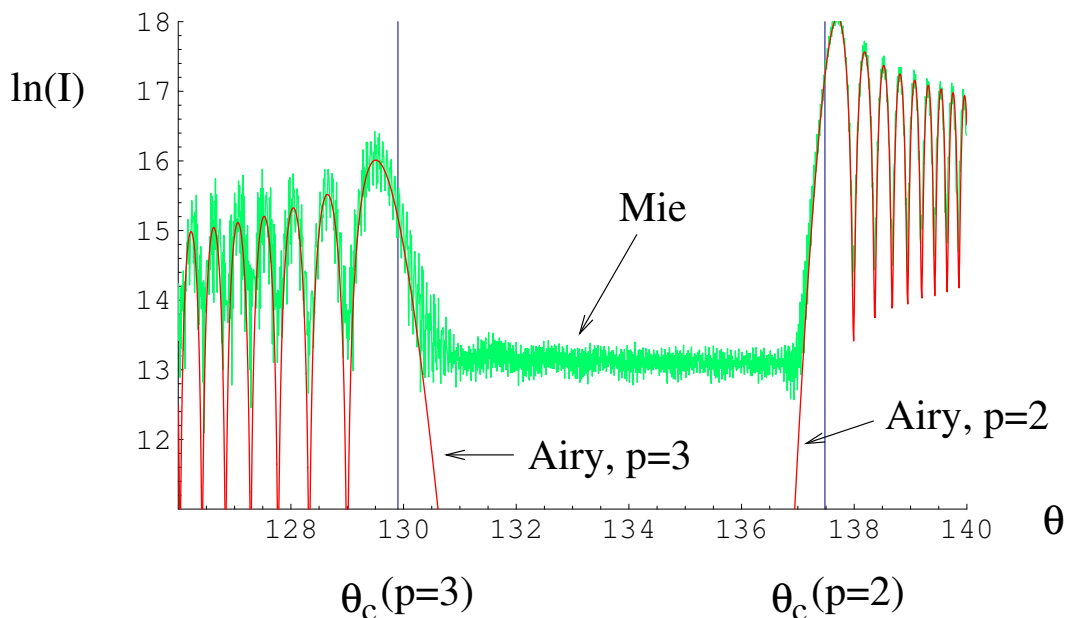
$$\nabla^2\psi + n^2k^2\psi = 0. \quad (28)$$

A bejövő elektromágneses síkhullámot, a vízcsepp által szórt és a vízcseppben belüli elektromágneses tereket a problémához jobban illeszkedő gömbhullámok szerint sorfejtve, a sorfejtési együtthatókat a vízcsepp határfelületén érvényes peremfeltételekből határozhatjuk meg. A gömbhullámok szerinti sorfejtésről bővebben például Jackson könyvében [17] találhat az olvasó. Ismerve a sorfejtési együtthatókat (Mie-együtthatók), a tér bármely pontjában felírhatjuk az elektromos és a mágneses teret. Az eredmény egy végtelen sor összegeként áll elő. Ezt a megoldást tekintjük az egzakt megoldásnak.

Az elektromágneses tér ismeretében kiszámíthatjuk az energiaáramlásra jellemző Poynting-vektort, ebből pedig a szórt fény intenzitásának szögfüggését, illetve a differenciális szórási hatáskeresztmetszetet, ami különbözik az 1.2. fejezetben ismertetett klasszikus differenciális szórási hatáskeresztmetszettől.

Annak ellenére, hogy a megoldás elvileg egzakt, numerikus szempontból csak az utóbbi évtizedekben, a számítógépes lehetőségek javulásával sikerült kezelni a problémát. Ennek fő oka, hogy a terek kiszámításához tipikusan kR számú igen bonyolult tagot tartalmazó sort kell összegezni, ami ráadásul nagyon lassan konvergál. Ezért a nagyméretű vízcseppek numerikus vizsgálata gyakorlatilag lehetetlen volt hatékony számítógépek nélkül. Nem csoda, hogy a Mie-elmélet korábban nem kapott kellő figyelmet, illetve csak közelítő megoldások származtatására szolgált alapul. Ezeket a közelítő megoldásokat lényegében a Mie-elméletből nyert sor átrendezésével kaphatjuk. A szivárvány jelenségének jobb megértésében a közelítő módszerek és eredmények komoly szerepet játszottak, és játszanak ma is. A számítógépek sokat segítenek, sőt talán nem merész az az állítás, hogy ezzel együtt az analitikus vizsgálatok egyre jobban háttérbe szorulnak. Nehéz megtalálni a bölcs közeputat a két kutatási irányvonal között, hiszen sok esetben a számítógépes eredmények inspirálják a másik vonalon történő kutatásokat. A szivárványnak a Mie-elmélet alapján történő numerikus vizsgálatában számos próbálkozás történt a számítógépek megjelenése óta, melyek közül az egyik legfontosabb Wang és van de Hulst munkája [33]. Az ötletes numerikus módszerek alkalmazásával sikerült nekik megbízhatóan pontos eredményeket kapni viszonylag kis gépidő mellett akár $kR = 50000$ értéknél is. Így megnyílt az út a hatékony numerikus vizsgálatok előtt, és azóta többféle programot is kifejlesztettek. Ma már egyszerű személyi számítógéppel is percek alatt kaphatunk eredményeket még $kR > 50000$ esetén is. Egy ilyen programot már korábban használtunk [25] a 15. ábra kapcsán.

A 18. ábrán összehasonlítottuk az egzakt Mie-, és az Airy-elmélet alapján kapott intenzitás szögfüggését fő- és mellékszivárványra, viszonylag nagyméretű vízcsepp esetén figyelembe véve a (13) polarizációs tényezőt is. Az ábrán a tájékozódás céljából berajzolt két függőleges vonal a (8) egyenlet alapján, a Descartes-elméletből számolt szórési szögeknek felelnek meg. Látható, hogy az Airy-közelítés



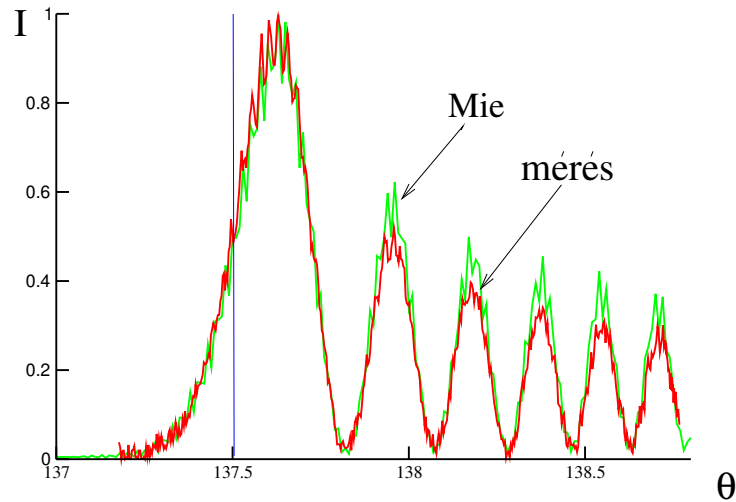
18. ábra. Az egzakt Mie- és az Airy-elmélet összehasonlítása főszivárvány ($p=2$) és mellékszivárvány ($p=3$) esetén. A számítás polarizálatlan, vörös színű fényre ($\lambda = 650$ nm, $n = 1,33$) és $R = 1$ mm-re vonatkozik ($kR = 9666,5$). A két függőleges vonal a (8) képletből számolt $\theta_c(p = 2) = 137,5^\circ$ és $\theta_c(p = 3) = 129,9^\circ$ szórési szögeknek felelnek meg a kétféle szivárványra. A jobb áttekinthetőség érdekében az intenzitások logaritmusát ábrázoltuk. Az intenzitást a 15. ábra feliratában adott egységekben számoltuk.

nagyon jól egyezik az egzakt eredménnyel. Azonban két dolog szembetűnő az ábrán. Egyrészt az

egzakt intenzitás-görbe az Airy-közelítésből nyert, sima szögfüggést mutató görbe körül gyorsan „osz-cillál”. Másrészt az egzakt eredményhez tartozó intenzitás — ellentétben az Airy-elmélettel — véges (azaz nem zérus) értéket vesz fel az Alexander-féle sötét sávban. Igaz, hogy ez az érték körülbelül öt nagyságrenddel kisebb a főszivárvány első csúcsához tartozó intenzitáshoz képest, és így a gyakorlatban ez a tartomány valójában sötétnek tekinthető. Megmutatható, hogy az egzakt eredményben tapasztalható gyorsan oszcilláló viselkedés a 2. ábrán látható, a vízcsepről közvetlenül visszaverődő ($p = 0$) és a főszivárvány kialakulásában szerepet játszó ($p = 2$) fénysugarak interferenciájának a következménye [25, 34]. Az Alexander-féle sötét sávban megfigyelt véges nagyságú intenzitás is a $p = 0$ fénysugarak szóródásából adódik, melynek magyarázatára a következő szakaszban térünk ki.

Összességében megállapíthatjuk, hogy viszonylag nagy méretű vízcseppek esetében az Airy-elmélet (eltekintve az Alexander-féle sötét sávot) jól írja le a fő- és mellékszivárványt és azok járulékos íveit. A két elmélet összehasonlításával kapcsolatos további részleteket például Lee munkájában találhat az olvasó [35]. Végül megjegyezzük, hogy ma már a kísérleti eredményeket nem az Airy-elmélet jóslataival, hanem az egzakt Mie-elmélettel vetik össze, és jó egyezést találtak [30].

A 16. ábrán látható mérési elrendezés alkalmas vízcseppeken történő fény szórásának a mérésére is. A kísérleteket Huhn Andrásné végezte el. A mérési eredmény és a Mie-elmélet összehasonlítása a 19. ábrán látható.

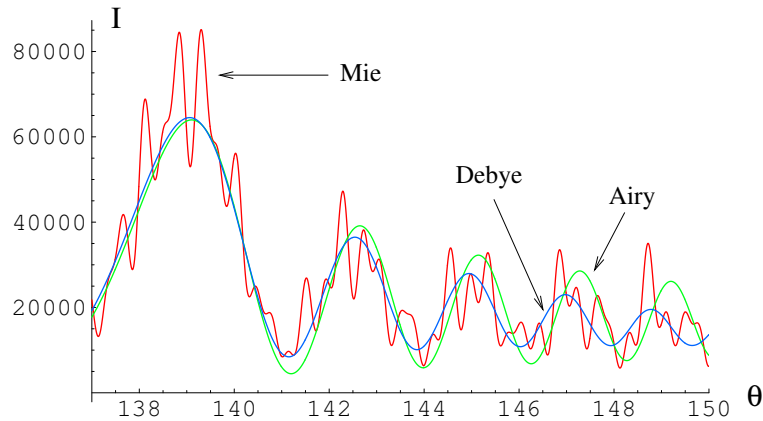


19. ábra. A mérési eredmény és az egzakt Mie-elmélet összehasonlítása főszivárvány ($p=2$) esetén. A számítás és a mérés polarizálatlan, vörös színű fényre ($\lambda = 650$ nm, $n = 1,33$) és $R = 1,82$ mm-re vonatkozik ($kR = 17593$). A függőleges vonal a (8) képletből számolt $\theta_c(p = 2) = 137,5^\circ$ szórási szögnek felel meg. A mért és a számolt intenzitást az első csúcs intenzitásának egységében adtuk meg.

3.2. A Debye-sor

A fejezet bevezetőjében említettük, hogy Debye is tanulmányozta a Maxwell-egyenletek alapján a fény szóródását, csak ő hengeres szórótestre végezte el a számításait. Természetesen azóta már kidolgozták a Debye-elméletet gömb alakú közegre is. A matematikai részleteket illetően Hovanec és Lock [36], illetve Rubinow [37] cikkét ajánlhatjuk. A legfontosabb különbség a Mie-elmélet és Debye eredménye között az, hogy Debye az intenzitás szögfüggését egy *kettős* sor alakjában adta meg. A Debye-sorban az egyik összegzés a Mie-elméletben is szereplő gömbhullámokra, míg a másik összegzés a vízcseppen belüli hurok p számára történik. Az első összeg a Mie-elmülethez hasonlóan lassan konvergál, de a p szerinti összeg, fizikailag is várható módon, gyorsan konvergál minden gömbhullámra. A Mie-elmélet és a Debye-sor azonos eredményt ad, ha az összegzést minden p -re elvégezzük. A Debye-sor előnye, hogy azonosítani lehet a különböző p -hez tartozó járulékokat, és

így jobban megérthetjük a szórási mechanizmust. Numerikusan ezeket a járulékokat például Philip Laven programjával tanulmányozhatjuk [25]. A programot használva a 20. ábrán látható az egzakt Mie-elmélet, és $p = 2$ esetben a Debye-sor, illetve az Airy-közelítés alapján számolt intenzitás szögfüggése $R = 0,05$ mm sugarú vízcsepre. Jól látszik, hogy $kR < 500$ -ra az Airy-közelítés a szórási



20. ábra. Az egzakt Mie-, a Debye- és az Airy-elmélet összehasonlítása főszivárvány esetén ($p = 2$). A számítás polarizálatlan, vörös színű fényre ($\lambda = 650$ nm, $n = 1,33$) és $R = 0,05$ mm-re vonatkozik, a polarizációs tényezőt is figyelembe véve. Ebben az esetben $kR = 483,3$. Az intenzitást a 15. ábra feliratában adott egységekben számoltuk.

szög növekedésével már jelentősen eltér az egzakt Mie-elmélet eredményétől. Ugyanígy látható, hogy a Debye-sor $p = 2$ tagja sem elegendő az egzakt eredmény reprodukálásához. Az Airy-közelítés eltérései kis méretű vízcseppekre abból adódnak, hogy a $p > 2$ -nek megfelelő szórási folyamatokat az elmélet elhanyagolja.

Hasonló módon, a program alapján könnyen megmutathatjuk, hogy egyrészt a Debye-sor $p = 0$ tagja állandó értéket ad az intenzitás szögfüggésére az Alexander-féle sötét sávban, másrészt ez a konstans érték a megfelelő paraméterek mellett megegyezik a 18. ábrán tapasztalt véges nagyságú intenzitással (eltekintve az egzakt eredményben látható kis oszcillációktól). A következő két szakaszban a szivárvánnyal kapcsolatos két fontos optikai jelenséget értelmezünk a Debye-sor alapján.

3.3. A koszorú, mint fényelhajlási jelenség

A koszorújelenséget (angolul *corona*) akkor figyelhetjük meg, ha a Nap (vagy a Hold) vékony felhőrétegen süt át. A koszorúról például a [38] internet címen találunk kitűnő felvételt. A Nap körül egy fényes, kör alakú udvart látunk, melyet gyakran további színes gyűrűk vesznek körül. A koszorú a viszonylag kis méretű vízcseppeken ($R < 0,01$ mm) vagy más szórócentrumokon való kis szórási szögnek ($\theta < 10^\circ$) megfelelő fényszóródás következménye. Ekkor a Napból érkező fénysugarak a vízcseppen, mint akadályon elhajlanak. A Nap körüli koszorút szabad szemmel nem láthatjuk (illetve nem is célszerű a szemünk óvása érdekében), mert a Nap közvetlen fénye elnyomja a koszorút. De ha kitakarjuk a koszorú középső részét, vagy ha az egésznek egy vízfelületről visszaverődő képét nézzük, akkor a gyűrűk már könnyebben megfigyelhetők. A Hold esetében a gyengébb fényerő miatt a megfigyelés sokkal egyszerűbb („udvara” van a Holdnak).

A jelenség hasonló a fénysugaraknak kör keresztmetszetű akadályon történő elhajlásához, melynek matematikai részletei megtalálhatók például Jackson könyvében [17], illetve a Landau-sorozat II. kötetében [21]. Minél kisebb a szórócentrum mérete, annál nagyobb a koszorú átmérője. Ismeretes, hogy a nagyobb hullámhosszú fény nagyobb szögben hajlik el. Ezért a koszorú belső gyűrűje kékes színű, míg kívül barnás.

A Debye-sor segítségével megérthetjük a koszorújelenséget. A sor $p = 0$ tagja nemcsak a 2. ábrán látható, a vízcsepről közvetlenül visszaverődő fénysugarak járulékát, hanem a vízcseppen történő

elhajlást is tartalmazza [36]. Numerikus számításokkal megmutatható, hogy a koszorújelenség intenzitásának szögfüggésében a Debye-sor $p = 0$ és $p = 1$ tagjai adják a legjelentősebb járulékot [25, 34]. Nussenzveig terjedelmes, kétrészes cikkében [39] részletes számításokkal is kimutatta, hogy a koszorújelenség jó közelítéssel leírható ennek a két tagnak a figyelembevételével. Azonban a matematikai részletek meglehetősen bonyolultak.

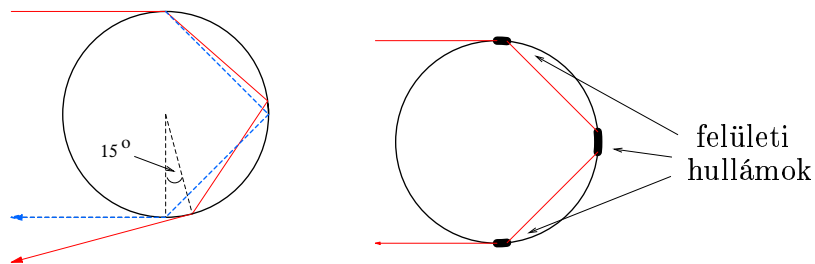
Mivel a koszorú jó közelítéssel egy elhajlási jelenség, a koszorú a szórócentrum anyagától függetlenül is kialakulhat. Nem függ a törésmutatótól sem, és nem szükséges, hogy a szórócentrum átlátszó legyen. A szórócentrum lehet például kicsi jégszemcse, pollen, vulkáni por vagy más szennyező részecske is. Az egyik legismertebb koszorújelenséget a Krakatau vulkán 1883-as kitörése után lehetett megfigyelni, a sztratoszférába került, és ott több éven át lebegő nagy mennyiségű vulkáni por következte. A gyűrűk feltűnően nagy méretűek (15°) és különösen színpompásak voltak. További részleteket a koszorújelenségről az olvasó a fent említett hivatkozásokból tudhat meg.

3.4. A glória avagy a felületi hullámok

A glória egy másik gyakran megfigyelt légköri fényjelenség. A glóriáról számos kitűnő felvétel található az interneten [40]. A fénysugaraknak vízcseppen történő szórásakor a glória körülbelül a $170^\circ < \theta < 180^\circ$ szórási szögtartományban figyelhető meg. A glória, mint légköri optikai jelenség, akkor tapasztalható, ha a megfigyelő egy magas ponton áll (például egy hegy tetején) és nézi a saját árnyékát, ami az előtte lévő felhőre vetődik. Ekkor a fejének árnyéka körül egy fényes, esetleg több színes gyűrűt lát. Ha több megfigyelő áll egymás mellett, akkor mindenki csak a saját fejének árnyéka körül látja a glóriát, de a szomszédján már nem. Ez is azt jelenti, hogy a glória a 180° szórási szög körül alakul ki.

A glóriáról az első feljegyzés a spanyol Antonio de Ulloa kapitánytól származik 1735-ből, aki egy tudományos expedíciót vezetett Peruban az Andok hegységben. Ilyen jelenség megfigyelésénél kR átlagos értéke tipikusan 200, és így a vízcseppek átlagos sugara $R = 0,02$ mm. A gyűrűk színének sorrendje azonos az előző szakaszban tárgyalt koszorúban lévőhöz. Manapság repülőgépen számos olyan fényképfelvétel készült, amelyen a gép árnyéka körüli színes gyűrűk, a glória jól kivehető. Örömmel állíthatom, hogy legutóbbi repülőgépes utamon néhány pillanatig magam is láttam ilyen glóriát.

A glóriát csak a 21. ábra bal felén látható szaggatott vonallal jelölt, elképzelt sugármenettel magyarázhatnánk, de ez a geometriai optika alapján nem lehetséges. Az ábrán a folytonos vonalnak megfelelő, érintőleg bejövő sugármenetre a szórási szög az (5) képlet alapján $n = 1,33$ törésmutató esetén és a sugármenet egyszeres belső visszaverődése mellett $\theta^* = 165^\circ$. Ez a szögérték 15° -kal

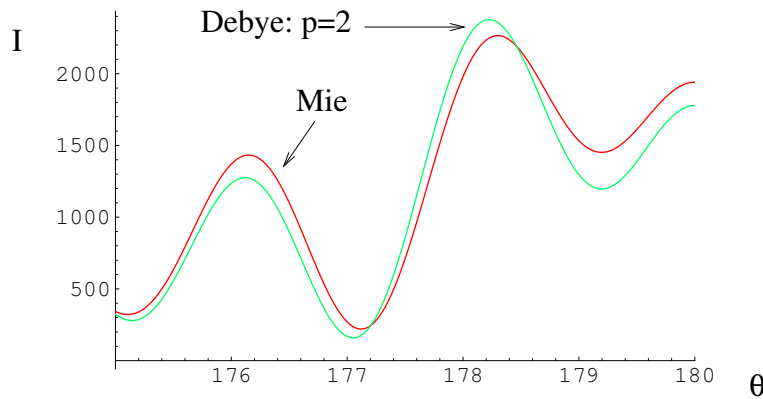


21. ábra. Az ábra bal oldalán a szaggatott vonalnak megfelelő sugármenet a geometriai optika szerint tiltott. Ugyanakkor a folytonos vonallal jelölt sugármenetre a $\theta^* = 165^\circ$ szórási szög nem adhat lényeges járulékot a glória létrejöttéhez. Az ábra jobb oldalán a vízcsepp felülete mentén haladó felületi hullámokkal értelmezhetjük a glória jelenségét.

kevesebb a teljes visszaszóráshoz szükséges 180° -os szögnél, ami a szaggatott vonallal jelölt sugármenetnek felel meg. Így ez a sugármenet nem adhat magyarázatot a glória jelenségére. A megoldást a *felületi hullámok* jelentik. A felületi hullámok jól ismertek például az elektromágneses hullámok

terjedésekor [17], de hangterjedésnél is megfigyelhetők. A 21. ábra jobb felén látható, a vízcsepp peremén haladó, felületi hullámok révén a sugármenet szórási szöge már elérheti a glóriához szükséges 180° -os szöget. A felületi hullámok éppen a teljes visszaverődés határszögének közelében a legerősebbek. Ezért lehetséges, hogy az ábrán látható sugármenet lényeges járulékot eredményezhet a teljes visszaszórás folyamatában.

A Mie-elmélet alapján kiszámolhatjuk az intenzitás szögfüggését a glória esetében is, de ez nem ad magyarázatot a jelenség okára. Azonban a Debye-sor segítségével ellenőrizhetjük, hogy vajon a fenti fizikai magyarázat helytálló-e. A 22. ábrán összehasonlítottuk az egzakt Mie-elmélet alapján számolt intenzitás szögfüggését, és a Debye-sor $p = 2$ tagjából adódó járulékot a $175^\circ < \theta < 180^\circ$ szórási szögtartományban. Jól látható, hogy a két eredmény elég jól egyezik a maximumok és mi-



22. ábra. Az egzakt Mie-elméletből és a Debye-sor $p = 2$ tagjából számolt intenzitás szögfüggése a glóriának megfelelő szögtartományban. A számítás polarizálatlan, vörös színű fényre ($\lambda = 650$ nm, $n = 1,33$) és $R = 0,01$ mm-re vonatkozik, a polarizációs tényezőt is figyelembe véve. Ebben az esetben $kR = 96,7$. Az intenzitást a 15. ábra feliratában adott egységekben számoltuk.

nimumok helyét illetően. Még jobb egyezés érhető el, ha figyelembe vesszük a $p > 2$ tagokat is a Debye-sorban. Numerikus vizsgálatokból kiderül, hogy ebben a szögtartományban az intenzitáshoz a legnagyobb járulékok a Debye-sor $p = 0, 2, 6, 7, 11$ tagjaiból származnak. Ahogy korábban említettük a Debye-sorban minden p -nek megfelelő tag tartalmaz még egy gömbhullámok szerinti összegzést, és ez az összeg felel meg esetünkben a felületi hullámoknak. Az ábra alapján látható, hogy a felületi hullámokra alapozott fizikai kép kielégítően magyarázza a glória jelenségét.

Nussenzveig analitikusan is tanulmányozta a glóriát a korábban már idézett két cikkében [39]. Hovanec és Lock részletesen elemezték a szivárványnál fellépő felületi hullámok szerepét [36, 37]. Laven munkáiban még további részletek és szép, színes képek találhatók a glóriáról [25, 34].

4. A szivárvány és a kvantummechanika kapcsolata

A kvantummechanikai szórásproblémát a *Schrödinger-egyenlet* megoldásával kezelhetjük. Speciálisan választott szórópotenciál esetén a Schrödinger-egyenlet alakja megegyezik az elektromágneses tér szórását meghatározó (28) egyenlettel. Tekintsünk egy R sugarú és V_0 „mélységű” gömbszimmetrikus „potenciálgödröt” (ez egy olyan potenciál, amelyre $V = 0$, ha $r > R$; $V = -V_0$, ha $r < R$). Ekkor könnyen beláthatjuk, hogy a k hullámszámú síkhullámmal jellemzett, m tömegű és $E = \hbar^2 k^2 / (2m)$ energiájú részecske szórását meghatározó Schrödinger-egyenlet és a (28) egyenlet azonos, ha az utóbbi esetben a közeg törésmutatóját az alábbi módon választjuk meg:

$$n = \sqrt{1 + \frac{2mV_0}{\hbar^2 k^2}}. \quad (29)$$

A kvantummechanikai szórás egyik alapvető feladata, a klasszikus szórási problémához hasonlóan, a hatáskeresztmetszet meghatározása. A $\psi = e^{ikz}$ síkhullámmal adott, z irányban terjedő szabad

részecskének a hullámfüggvénye a szórócentrumon történő szóródása után a szórócentrumtól távol aszimptotikusan a következő alakú

$$\psi \approx e^{ikz} + \frac{f(\theta)}{r} e^{ikr}, \quad (30)$$

ahol $f(\theta)$ -t *szórásamplitúdónak* nevezzük és a második tag egy kifutó gömbhullámnak felel meg. Ekkor a differenciális szórási hatáskeresztmetszet $d\sigma/d\theta = 2\pi \sin\theta |f(\theta)|^2$ [41]. Így a problémát visszavezettük az $f(\theta)$ szórásamplitúdó meghatározására. Az egzakt $f(\theta)$ szórásamplitúdó kifejezhető parciális gömbhullámok szerinti sor összegeként. A sor tagjait a Schrödinger-egyenlet megoldásából kaphatjuk meg, ami azonban a legtöbb esetben meglehetősen nehéz feladat. A kvantummechanikai szórásról kitűnő fejezet található a Landau-sorozat III. kötetében [41].

Síkhullámok szórásakor gyakran találkozunk azzal az esettel, amikor létezik egy θ_c szórási szög, amelynél a differenciális szórási hatáskeresztmetszet hirtelen változik. Ekkor klasszikus esetben, a szivárványhoz hasonlóan, beszélhetünk „megvilágított” tartományról, illetve „árnyéktartományról”. Az ilyen kvantummechanikai szórást, a szivárványnál fellépő fényszórással való hasonlóság miatt, gyakran *szivárványszórásnak* is nevezik. Az egzakt $f(\theta)$ szórásamplitúdó sora rendkívül lassan konvergál a θ_c szórási szög közelében, ezért közelítésekre van szükség a hatáskeresztmetszet kiszámításához. A vizsgált θ szórási szögtől függően három alapvetően különböző közelítés ismert a szivárványszórásra: (i) a *klasszikus*, (ii) a *kváziklasszikus* és (iii) az *Airy-közelítés*.

A klasszikus közelítésnél az egzakt hatáskeresztmetszet kifejezésében a gyorsan oszcilláló tagok sima részét véve visszkapjuk a klasszikus hatáskeresztmetszetnek a (9) képlettel adott alakját. A matematikai részletek iránt érdeklődő olvasónak a Landau-sorozat III. kötetében a 127. fejezetet ajánljuk [41]. Az egzakt hatáskeresztmetszetnek a klasszikus közelítése $|\theta - \theta_c|$ nagy értékeire érvényes, és a hatáskeresztmetszet szinguláris a θ_c szórási szögnél. Fényezés esetén a klasszikus közelítés a Descartes-elméletnek felel meg. Kváziklasszikus közelítésben a részecske de Broglie-hullámhossza nem változik jelentősen a vele azonos nagyságrendű távolságokon [41]. A hatáskeresztmetszet ugyancsak szinguláris a θ_c szórási szögnél, és a közelítés nagy $|\theta - \theta_c|$ értékekre jó. Az Airy-közelítést szivárványszórásra először Ford és Wheeler alkalmazták [42]. Ez akkor ad jó eredményt, ha $|\theta - \theta_c|$ csak néhány fok. A hatáskeresztmetszet kiszámításánál a kváziklasszikus közelítésből indultak ki, és az $f(\theta)$ szórásamplitúdót θ szerint a θ_c szórási szög körül harmadrendig sorfejtve közelítették. A hatáskeresztmetszetet végül egy Airy-függvénnyel lehet kifejezni a korábban látott fényezéshez hasonlóan. Innen ered az Airy-közelítés elnevezés. A számítás menete magyarul is megtalálható a Landau-sorozat III. kötetében a 612. oldalon a 2. kidolgozott feladat kapcsán [41].

A fentiekben vázolt eltérő közelítések oka, hogy a $\hbar \rightarrow 0$ klasszikus határesetben az $f(\theta)$ szórásamplitúdó aszimptotikusan $\hbar^{1/2}$ hatványai szerinti sor, ha $|\theta - \theta_c|$ nagy, míg $\hbar^{1/3}$ hatványai szerinti sor, ha $|\theta - \theta_c|$ kicsi. Felmerült az igény egy olyan közelítésre, ami minden szórási szögre jól használható. Ezt a közelítést *uniform-közelítésnek* nevezik. A differenciál-egyenletek közelítő megoldásaira az uniform-közelítés már ismert volt, és a fizikában gyakran előforduló differenciál-egyenletekre a formulák megtalálhatók az irodalomban [23]. A kvantummechanikai szórás esetén az $f(\theta)$ szórásamplitúdó kifejezhető egy komplex síkon értelmezett integrállal. Ebben az esetben az $f(\theta)$ függvény uniform-közelítésére először Berry vezetett le általános formulákat [43]. Optikai szivárványra, a kvantummechanikai szórásához hasonlóan, Khare és Nussenzeig alkalmazta először az uniform-közelítést [44]. Kiderült, hogy mind a kvantummechanikai, mind az optikai szórás problémájában az uniform-közelítésből számolt hatáskeresztmetszet minden szórási szögre nagyon jól egyezik az egzakt számolásból kapott eredményekkel.

Végezetül megemlíjtjük, hogy az optikai esetben ismert koszorú és glória jelenségekhez hasonlóan a kvantummechanikában is létezik ez a szórástípus, és *glóriaszórásnak* nevezik. Kváziklasszikus közelítésből kiindulva Ford és Wheeler tanulmányozta először a glóriaszórást [42], de a számítás lépései megtalálhatók a Landau-sorozat III. kötetében a 613. oldalon a 3. kidolgozott feladatban is [41].

5. Összefoglalás

Arisztotelész óta több neves fizikus tanulmányozta az egyik legismertebb és legszebb légköri jelenséget, a szivárványt. A szivárvánnyal kapcsolatos jelenségek egzakt tárgyalása nem nélkülözheti mindazt a tudást, amit a fényről tudunk. Az optika tudományának fejlődésében mindig nagy szerepet játszottak az újabb elméletek alkalmazásai a szivárvány leírásában. De fordítva is igaz, a szivárvány jelenségének pontosabb értelmezése is befolyásolta optika fejlődését.

Ebben a munkában a szivárvány fizikájának legfontosabb elméleteit ismertettük. Az első fejezetben a Descartestól származó első, alapjaiban helyes, geometriai optikára épülő elméletet taglaltuk. A második fejezetben ismertettük Young és Airy elméleteit, amelyek egyrészt további bizonyítékokat szolgáltatottak a fény hullámtermészetére, másrészt a szivárvány mélyebb megértésében is nagy szerepet játszottak. A következő fejezetben a szivárvány egzakt, ún. Mie-elméletét vázoltuk, és a különféle közelítésekről, a koszorú, illetve glória jelenségekről adtunk egy áttekintést. Az utolsó fejezetben rámutattunk a szivárvány és a kvantummechanikai szórás közti hasonlóságra.

A szakmai részletek mellett történetileg is megpróbáltuk követni a századok során elért eredményeket. Természetesen nem gondolhatjuk, hogy a témát teljesen kimerítettük. Arra törekedtünk, hogy a bemutatott anyag megfelelő válogatással felhasználható legyen mind a középiskolai, mind az egyetemi képzésben. Külön ki szeretnénk emelni, hogy tudomásunk szerint például az Airy-elmélet részletei hiányoznak a hazai irodalomból (még az egyetemi oktatásban sem említik!). Az egzakt Mie-elmélet is csak összefoglaló jelleggel szerepel a hazai meteorológus képzésben [32].

Nem szóltunk az ég kék színét magyarázó *Rayleigh*-szórásról annak ellenére, hogy a jelenséget a Mie-szórás egy speciális esetének tekinthetjük. A *Rayleigh*-szórás olyan jelenségeket ír le, amelyben a szórócentrum mérete kisebb a fény hullámhosszánál. Kitűnő összefoglaló található a témával kapcsolatban a Landau-sorozat VIII. kötetében [16] és Jackson könyvében [17].

A valóságban megfigyelhető szivárvány létrejöttében több olyan tényező is szerepet játszhat, amelyekkel az itt felsorolt elméletek egyike sem számol. Ilyen például az, hogy a Nap nem pontszerű fényforrás, a látószöge kb. $0,5^\circ$. A vízcseppek mérete különböző, sőt alakjuk eltérhet az ideális gömb alaktól. A vízcseppek mérete és alakja összetett módon befolyásolja a szivárvány színeinek erősségét és ívének alakját. A nagy és lapos vízcseppek okozta szivárványt annak ívének alján látjuk fényesebbnek, míg a szivárvány tetejéről jövő fénysugarak a kicsi, gömb alakú vízcseppeken való szóródásból származnak. Kérdéses a víz törésmutatójának a fény hullámhosszától való függése is. Bizonytalanságot jelent a napsugárzás intenzitásának hullámhosszfüggése is. Nem részleteztük a szivárvány színességével kapcsolatos problémákat sem. A fenti problémák legtöbbjét laboratóriumi körülmények között ki lehet küszöbölni. A szivárvány kísérleti vizsgálatának is nagy az irodalma, és ezek közül is több cikk foglalkozik olyan demonstrációs kísérletek ismertetésével, amelyek felhasználhatók az oktatásban is [14, 30, 45, 46]. Nem beszéltünk a ködben, erdő fái közt megfigyelhető, vagy a vízfelszínről visszatükröződő szivárványokról. Ezeket a hiányosságokat pótolandó, összegyűjtöttünk néhány internet címet, ahol mindezekről, illetve a szivárványról sok-sok színes képpel illusztrált anyagot, további részleteket találhat az érdeklődő olvasó [25, 47].

Köszönetnyilvánítás

Köszönetemet szeretném kifejezni *Dávid Gyulának*, *Geszti Tamásnak*, *Gnädig Péternek*, *Haiman Otónak*, *Horváth Gábornak*, *Huhn Andrásnének*, *Kis-Szabó Krisztiánnak*, *Pályi Andrásnak*, *Pollner Péternek*, *Tichy Gézának* és *Weidinger Tamásnak* a kézirat olvasása után javasolt hasznos tanácsaikért. Hálás vagyok *Philip Lavennek* a levelezésünk nyomán nyújtott segítségért.

Ajánlott irodalom:

- [1] <http://www.sundog/clara.co.uk/rainbows/bows.htm>
- [2] <http://www.sundog/clara.co.uk/rainbows/supers.htm>
- [3] René Descartes: *Discours de la Méthode*, 1637; további utalások találhatóak még [5]-ben.
- [4] Mátrai Tibor: *Gyakorlati spektroszkópia*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1963.
- [5] Simonyi Károly: *A fizika kultúrtörténete*, Gondolat Kiadó, Budapest, 1986 (3. kiadás).
- [6] H. M. Nussenzveig: *The theory of the rainbow*, Scientific American **236**, 116-127 (1977).
- [7] Honyek Gyula: *A szivárvány*, Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, 1991/1 (január), 33-37. oldal.
- [8] Czelnai Rudolf: *Bevezetés a meteorológiába I. Légekörtani alapismeretek*, Egyetemi jegyzet, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.
- [9] H. C. van de Hulst: *Light scattering by small particles*, New York, John Wiley & Sons, Inc. 1957; New York, Dover 1981.
- [10] M. Kerker: *The scattering of Light*, Academic Press, New York and London, 1969.
- [11] John A. Adam: *The mathematical physics of rainbows and glories*, Physics Reports **356**, 229-365 (2002).
- [12] R. L. Lee, Jr. and A. B. Fraser: *The Rainbow Bridge: Rainbows in Art, Myth, and Science*, Pennsylvania State University, Philadelphia, USA, 2001.
- [13] <http://www.kfki.hu/fszemle>
<http://complex.elte.hu/~cserti/Szivarvany.pdf>
- [14] J. D. Walker: *Multiple rainbows from single drops of water and other liquids*, American Journal of Physics **44**, 421-433 (1976).
- [15] L. D. Landau és E. M. Lifsic: *Elméleti Fizika I (Mechanika)*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1974.
- [16] L. D. Landau és E. M. Lifsic: *Elméleti Fizika VIII (Folytonos közegek elektrodinamikája)*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.
- [17] J. D. Jackson: *Klasszikus elektrodinamika*, TypoT_EX, Budapest, 2004.
- [18] A. Barta, G. Horváth, B. Bernáth and V. B. Meyer-Rochow: *Imaging polarimetry of the rainbow*, Applied Optics **42**, 399-405 (2003).
- [19] G. Horváth and D. Varjú: *Polarized Light in Animal Vision — Polarization Patterns in Nature*, Springer-Verlag, Heidelberg - Berlin - New York, 2003, p. 447.
- [20] G. B. Airy: *On the intensity of light in the neighbourhood of a caustic*, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, **6**, 379-403 (1838).
- [21] L. D. Landau és E. M. Lifsic: *Elméleti Fizika II (Klasszikus erőterek)*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1976.
- [22] W. J. Humphreys: *Physics of the Air*, McGraw - Hill Book Company, Inc., New York and London 1940, pp. 476-500, Chapter III.

- [23] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New-York, 1972.
- [24] G. P. Können and J. H. de Boer: *Polarized rainbow*, Applied Optics **18**, 1961-1965 (1979).
- [25] A szivárványról és más kapcsolódó témáról sok képpel illusztrált összefoglaló, és a többféle közelítő, illetve egzakt megoldásra kidolgozott, ingyenesen letölthető program található a <http://www.philiplaven.com/mieplot.htm> internetcímen.
- [26] L. V. Lorenz: *Upon the Light Reflected and Refracted by a Transparent Sphere*, Vidensk. Selsk. Shrifter **6**, 1-62 (1890), dán nyelvű. Ez a hivatkozás és továbbiak találhatóak például a [33] cikkben.
- [27] G. Mie: *Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen*, Ann. Phys., Leipzig **25**, 377-445 (1908).
- [28] P. Debye: *Der Lichtdruck auf Kugeln von beliebigem Material*, Ann. Phys., Leipzig **30**, 57-136 (1909).
- [29] M. Born és E. Wolf: *Principles of Optics*, Pergamon Press, New York, 1989 (6. javított kiadás).
- [30] I. Weiner, M. Rust and T. D. Donnelly: *Particle size determination: An undergraduate lab in Mie scattering*, American Journal of Physics **69**, 129-136 (2001).
- [31] László István: *A részecskék sugárzás-szórásának fizikai törvényszerűségei*, Meteorológiai Tanulmányok **33**, 27. oldal (1979).
- [32] Bencze Pál, Major György és Mészáros Ernő: *Fizikai Meteorológia* (szerk.: Mészáros Ernő), Akadémiai Kiadó, Budapest, 1982.
- [33] Ru. T. Wang and H. C. van de Hulst: *Rainbows: Mie computations and the Airy approximation*, Applied Optics **30**, 106-117 (1991).
- [34] P. Laven: *Simulation of rainbows, coronas, and glories by use of Mie theory*, Applied Optics **42**, 436-444 (2003).
- [35] R. L. Lee Jr.: *Mie theory, Airy theory, and the natural rainbow*, Applied Optics **37**, 1506-1519 (1998).
- [36] E. A. Hovenac and J. A. Lock: *Assesing the contributions of surface waves and complex rays to far-field Mie scattering by use of the Debye series*, J. Opt. Soc. Am. A **9**, 781-795 (1992).
- [37] S. I. Rubinow: *Scattering from a penetrable sphere at short wavelengths*, Annals of Physics, N. Y., **14**, 305-332 (1961).
- [38] <http://www.sundog.clara.co.uk/droplets/corona.htm>
- [39] H. M. Nussenzveig: *High-frequency scattering by a transparent sphere. I. direct reflection and transmission*, and *High-frequency scattering by a transparent sphere. II. theory of the rainbow and glory*, Journal of Mathematical Physics **10**, 82-124 and 125-176 (1969).
- [40] <http://www.sundog.clara.co.uk/droplets/glory.htm>
<http://www.sundog.clara.co.uk/droplets/gloim1.htm>

- [41] L. D. Landau és E. M. Lifsic: *Elméleti Fizika III (Kvantummechanika)*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.
- [42] K. W. Ford and J. A. Wheeler: *Semiclassical description of scattering*, Annals of Physics, N. Y., **7**, 259-286 (1959).
- [43] M. V. Berry: *Uniform approximation for potential scattering involving a rainbow*, Proc. Phys. Soc. **89**, 479-490 (1966).
- [44] V. Khare és H. M. Nussenzveig: *Theory of the Rainbow*, Physical Review Letters **33**, 976-980 (1974).
- [45] H. A. Daw: *A 360° rainbow demonstration*, American Journal of Physics **58**, 593-595 (1990).
- [46] A. J. Cox, A. J. DeWeerd, J. Linden: *An experiment to measure Mie and Rayleigh total scattering cross sections*, American Journal of Physics **70**, 620-625 (2002).
- [47] <http://www.sundog.clara.co.uk/atoptics/phenom.htm>
<http://my.unidata.ucar.edu/content/staff/blynds/rnbw.html>
http://www.usna.edu/Users/oceano/raylee/RainbowBridge/Chapter_8.html
<http://hjem.get2net.dk/Hemmingsen/Rainbow/>
<http://www.phy.ntnu.edu.tw/java/Rainbow/rainbow.html>