Furfangos fejtörők fizikából

Vigh Máté

ELTE Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

NANOPHYSICS GROUP
EÖTVÖS UNIVERSITY, BUDAPEST

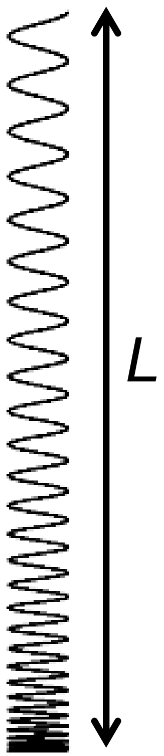
Az atomoktól a csillagokig
2013. április 25.

1. Fejtörő. A ,,SLINKY-rugó" egy olyan rugó, melynek nyújtatlan hossza elhanyagolhatóan kicsi, jó közelítéssel követi a Hooke-törvényt, és már a saját súlya hatására is számottevően megnyúlik.

Milyen hosszú lesz az egyik végénél fogva felfüggesztett slinky? A slinky tömege *m*, rugóállandója *D*.

1. Fejtörő. A ,,SLINKY-rugó" egy olyan rugó, melynek nyújtatlan hossza elhanyagolhatóan kicsi, jó közelítéssel követi a Hooke-törvényt, és már a saját súlya hatására is számottevően megnyúlik.

Milyen hosszú lesz az egyik végénél fogva felfüggesztett slinky? A slinky tömege *m*, rugóállandója *D*.

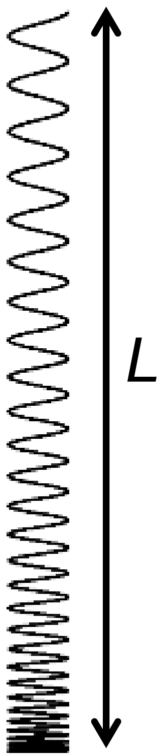


Mi okozza a fejtörést? A slinky minden pontját más erő feszíti!

$$L = \frac{mg}{D}$$

1. Fejtörő. A ,,SLINKY-rugó" egy olyan rugó, melynek nyújtatlan hossza elhanyagolhatóan kicsi, jó közelítéssel követi a Hooke-törvényt, és már a saját súlya hatására is számottevően megnyúlik.

Milyen hosszú lesz az egyik végénél fogva felfüggesztett slinky? A slinky tömege *m*, rugóállandója *D*.

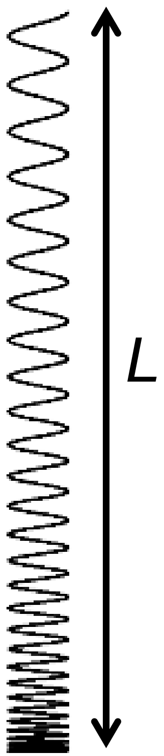


Mi okozza a fejtörést? A slinky minden pontját más erő feszíti!

$$\cancel{L = \frac{mg}{D}}$$

1. Fejtörő. A ,,SLINKY-rugó" egy olyan rugó, melynek nyújtatlan hossza elhanyagolhatóan kicsi, jó közelítéssel követi a Hooke-törvényt, és már a saját súlya hatására is számottevően megnyúlik.

Milyen hosszú lesz az egyik végénél fogva felfüggesztett slinky? A slinky tömege *m*, rugóállandója *D*.



Mi okozza a fejtörést? A slinky minden pontját más erő feszíti!

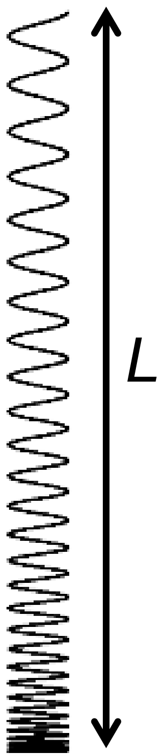
$$\cancel{L = \frac{mg}{D}}$$

Az erő legalul nulla, a felfüggesztésnél pedig *mg*.

Ötlet: osszuk fel a slinky-t N darab, egyenlő tömegű részre!

1. Fejtörő. A ,,SLINKY-rugó" egy olyan rugó, melynek nyújtatlan hossza elhanyagolhatóan kicsi, jó közelítéssel követi a Hooke-törvényt, és már a saját súlya hatására is számottevően megnyúlik.

Milyen hosszú lesz az egyik végénél fogva felfüggesztett slinky? A slinky tömege *m*, rugóállandója *D*.



Alulról számolva a k-adik darabkát feszítő erő: $F_k = k\frac{m}{N}g$

A k-adik darabka megnyúlása (azaz a hossza): $l_k = \frac{F_k}{ND} = \frac{k \cdot mg}{N^2 D}$

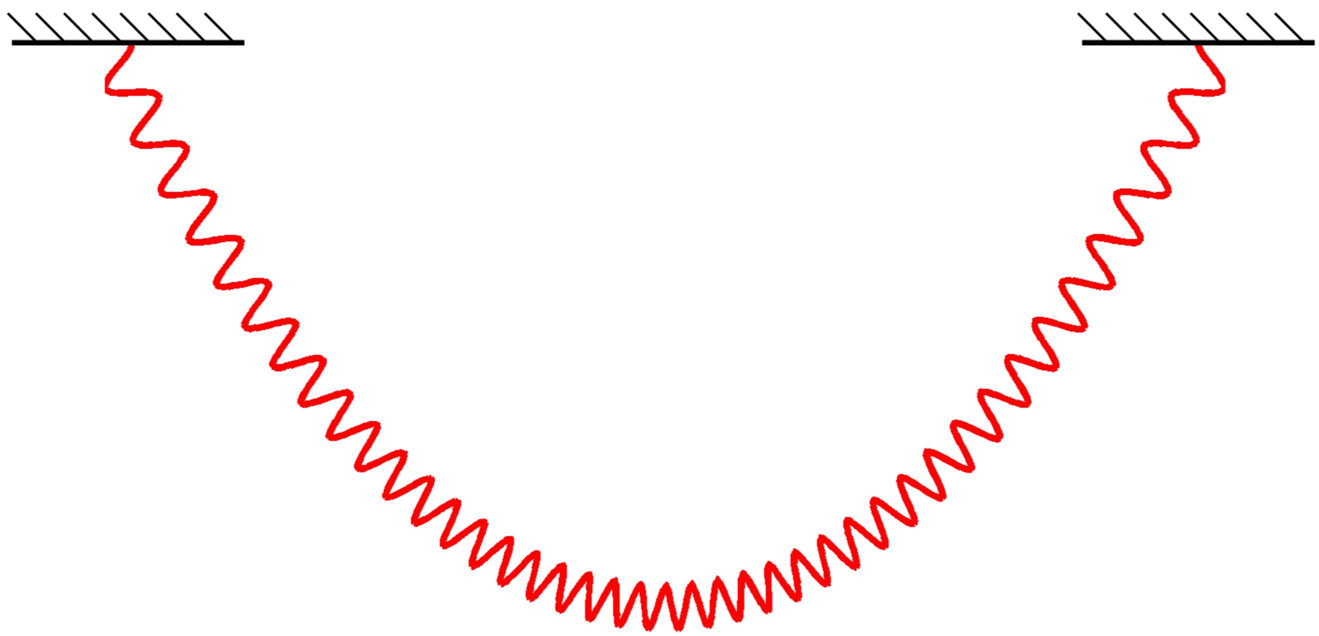
A slinky teljes megnyúlása:

$$\sum_k l_k = \sum_{k=1}^{N} \frac{k \cdot mg}{N^2 D} = \frac{mg}{N^2 D}\sum_{k=1}^{N} k = \frac{mg}{N^2 D}\frac{N(N+1)}{2} \approx \frac{mg}{2D}$$

Olyan, mintha *mg*/2 átlagos erő feszítené a slinkyt!

2. Fejtörő. A ,,SLINKY-rugó" egy olyan rugó, melynek nyújtatlan hossza elhanyagolhatóan kicsi, jó közelítéssel követi a Hooke-törvényt, és már a saját súlya hatására is számottevően megnyúlik.

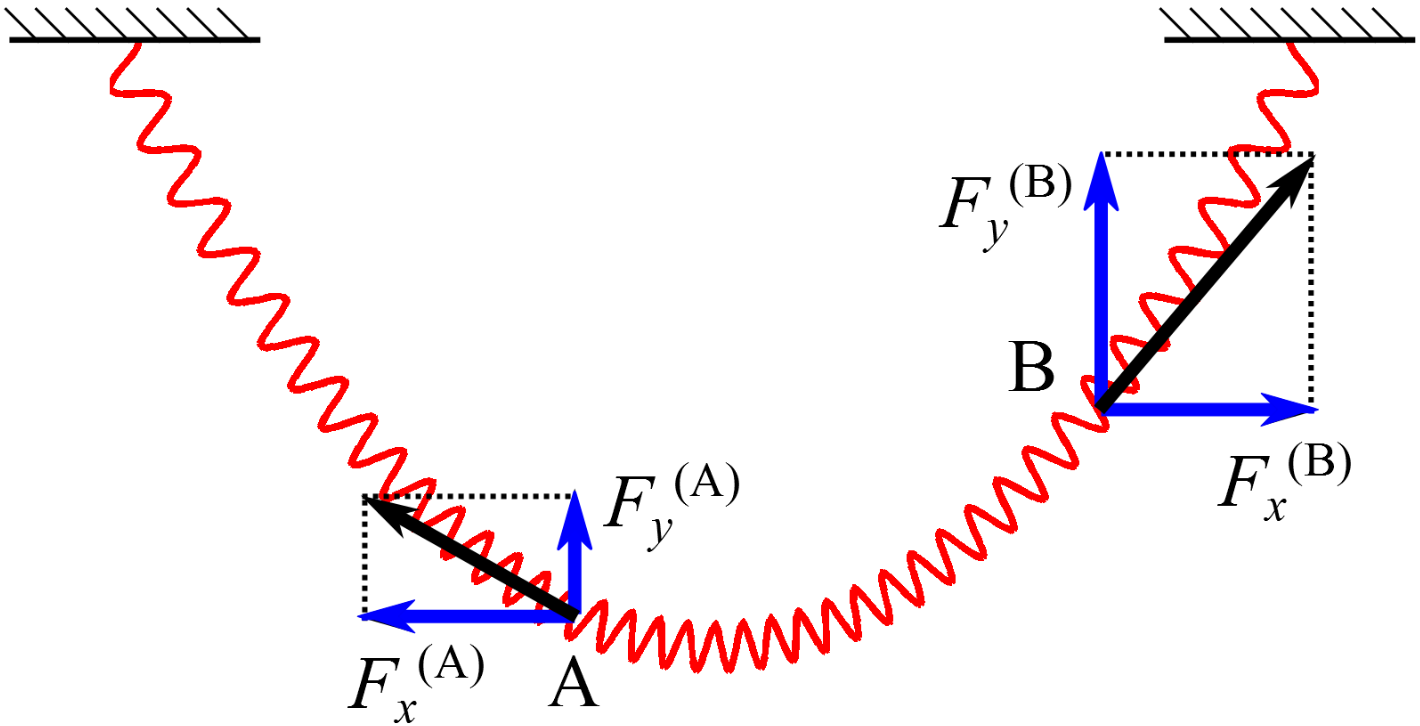
Milyen alakot vesz fel egy ilyen rugó, ha a végeit azonos magasságban, egymástól bizonyos távolságban rögzítjük?



Rajzoljuk fel a slinky egy tetszőlegesen kiválasztott darabjára az erőket!

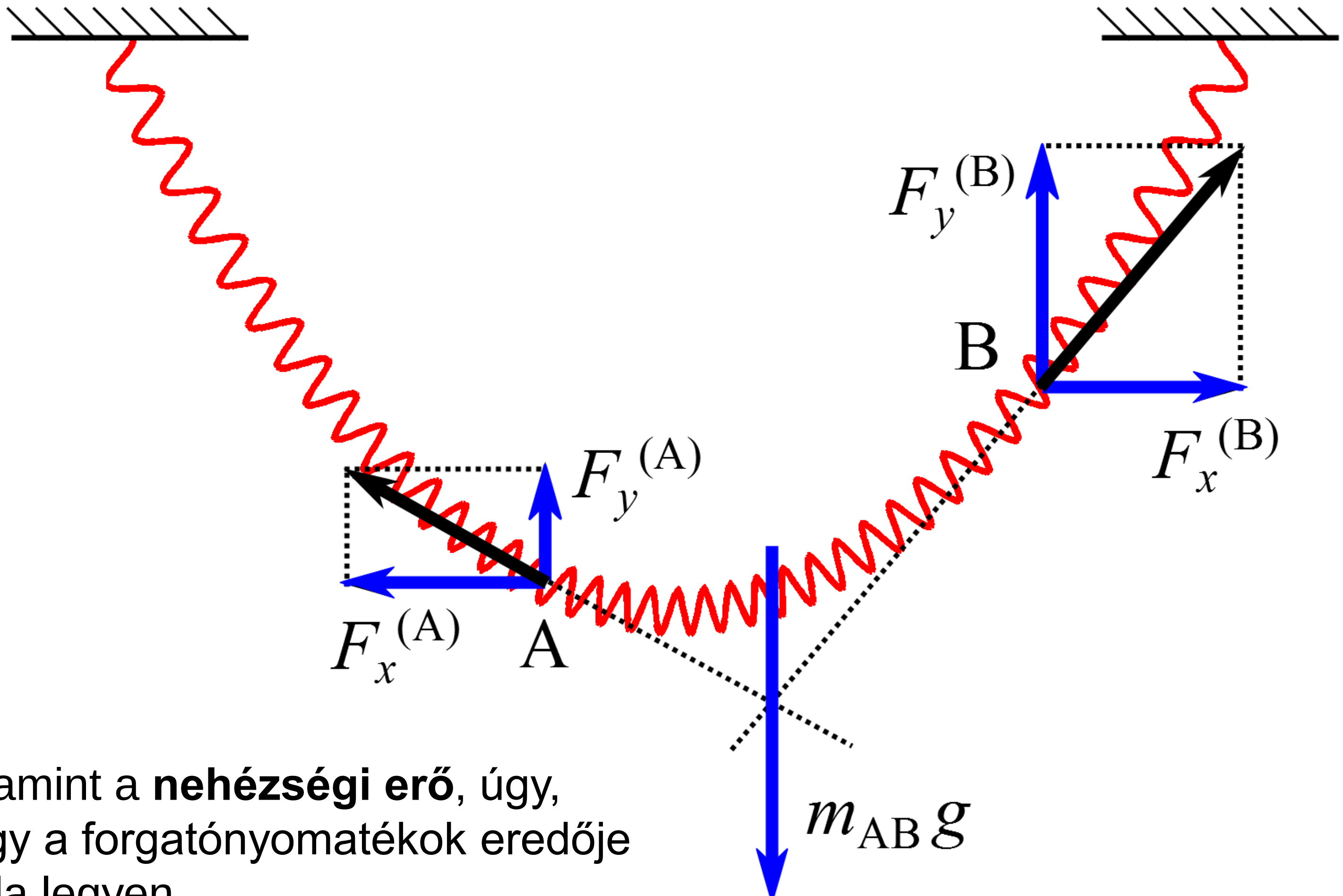
Rajzoljuk fel a slinky egy tetszőlegesen kiválasztott darabjára az erőket!

Hatnak a **rugalmas erők** (érintő irányúak, hiszen a slinky könnyen hajlik),



Rajzoljuk fel a slinky egy tetszőlegesen kiválasztott darabjára az erőket!

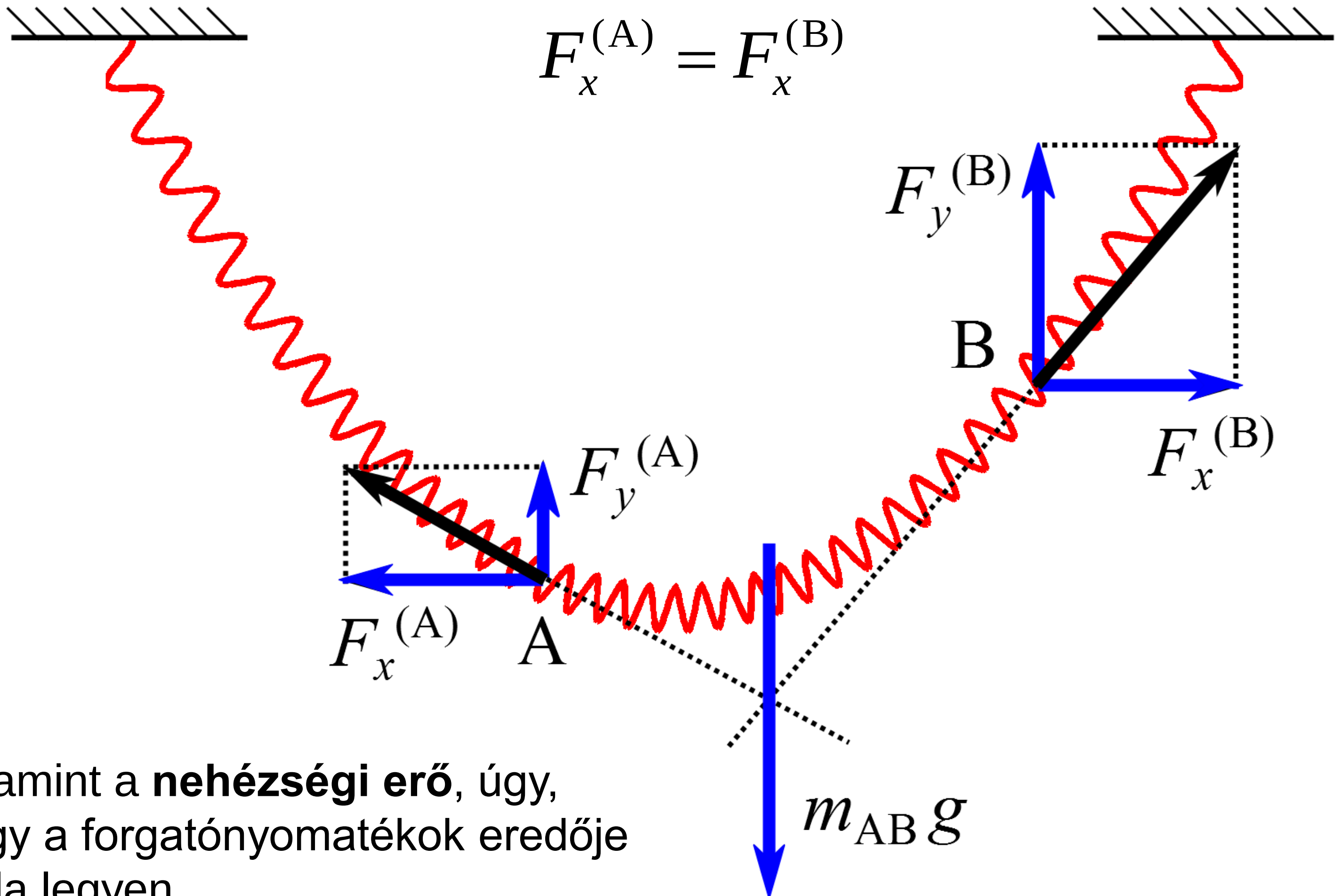
Hatnak a **rugalmas erők** (érintő irányúak, hiszen a slinky könnyen hajlik),



valamint a **nehézségi erő**, úgy, hogy a forgatónyomatékok eredője nulla legyen.

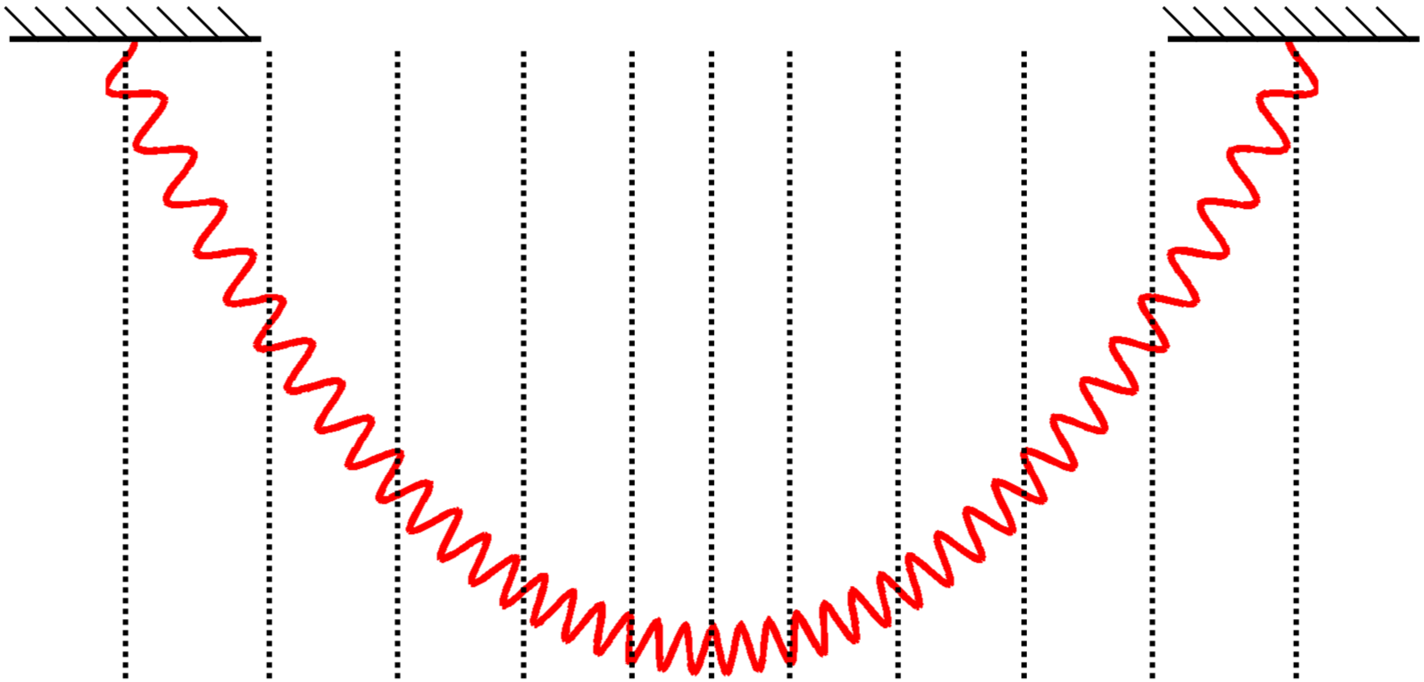
Felismerés: a rugalmas erők vízszintes komponense meg kell egyezzen!

Sőt, **a feszítőerő x komponense a slinky minden pontjában ugyanakkora**.



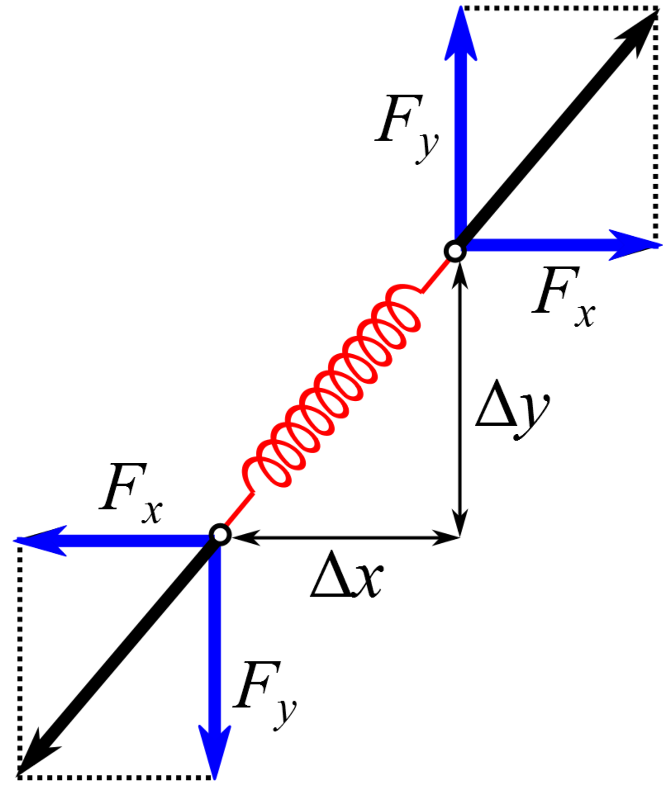
valamint a **nehézségi erő**, úgy, hogy a forgatónyomatékok eredője nulla legyen.

Ötlet: Gondolatban osszuk fel a slinky-t függőleges egyenesekkel egyenlő tömegű darabkákra! **(Tudjuk hogyan kell? Nem, de ez nem számít!)**



Az egyenlő tömegű darabkáknak azonos a rugóállandója. (Ha az egész slinky rudóállandója *D*, akkor az *N* számú darabkának egyenként $D^*=ND$.)

Egyetlen kis darabkára ható erők:



A darabka hossza (~megnyúlása) arányos az őt feszítő erővel:

$$\Delta l = F / D^*,$$

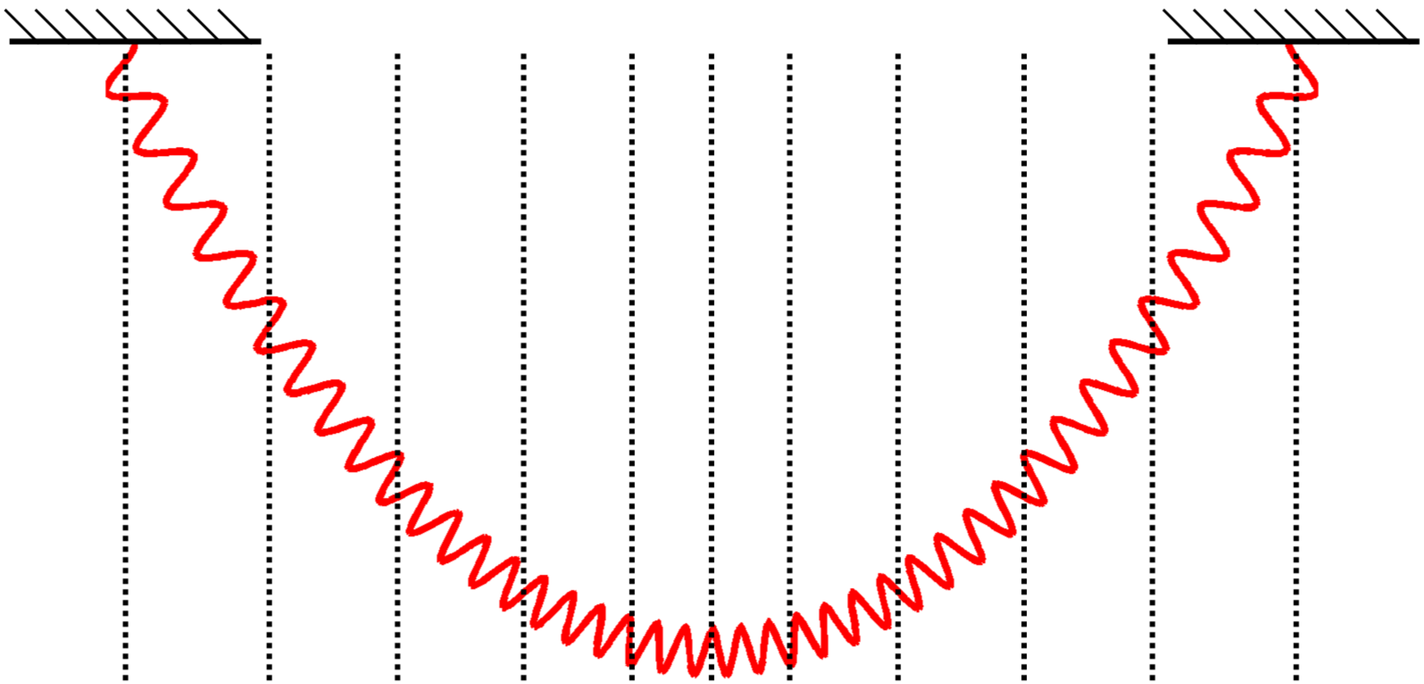
ahol D^* a kis darabka rugóállandója.

A hossznak az x-irányú vetülete pedig arányos a feszítőerő x-irányú vetületével:

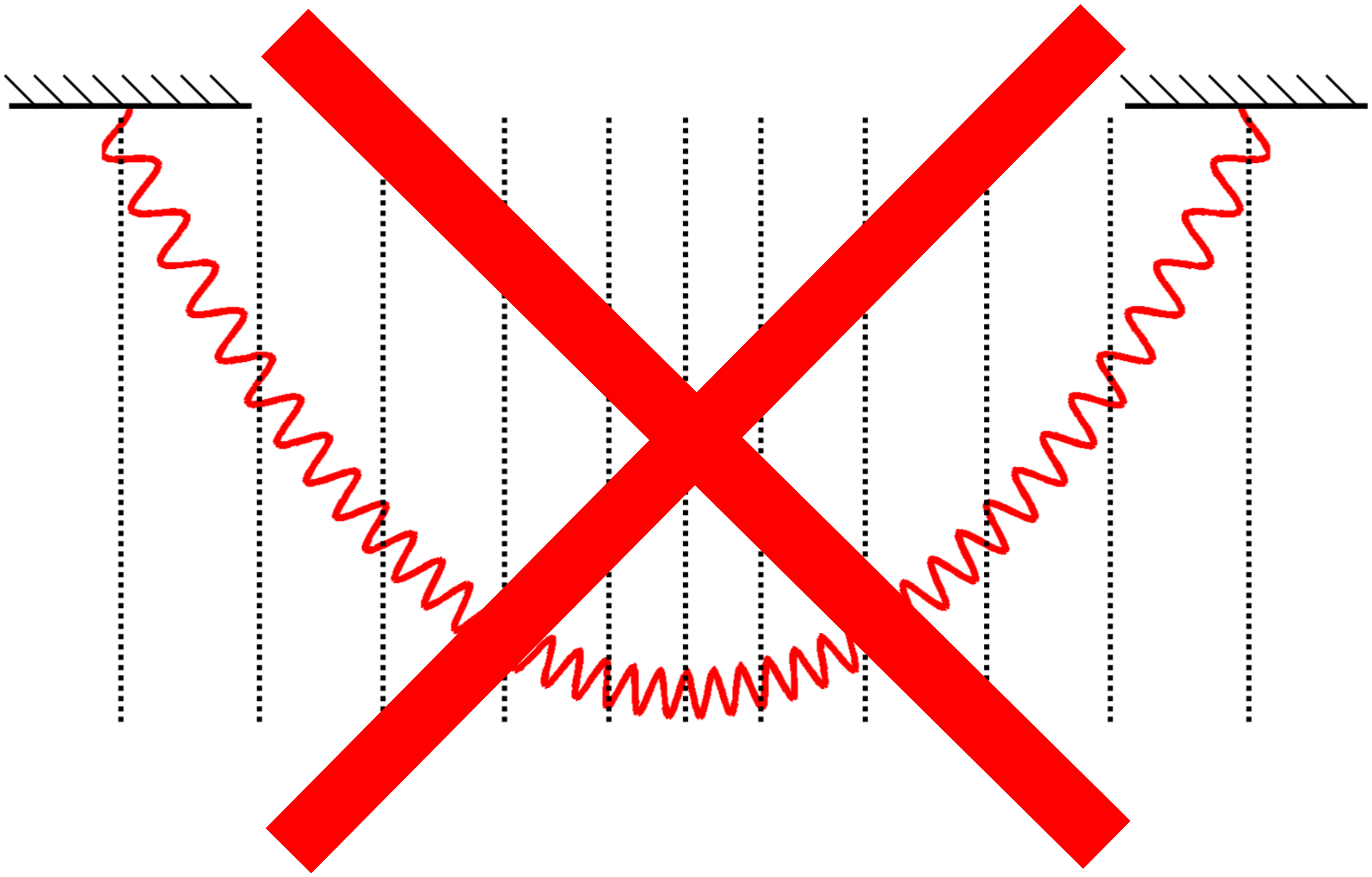
$$\Delta x = F_x / D^*$$

Láttuk, hogy F_x mindenhol ugyanakkora, csakúgy, mint a darabkák D^* rugó-állandója, **ezért a darabkák Δx vetülete is megegyezik!**

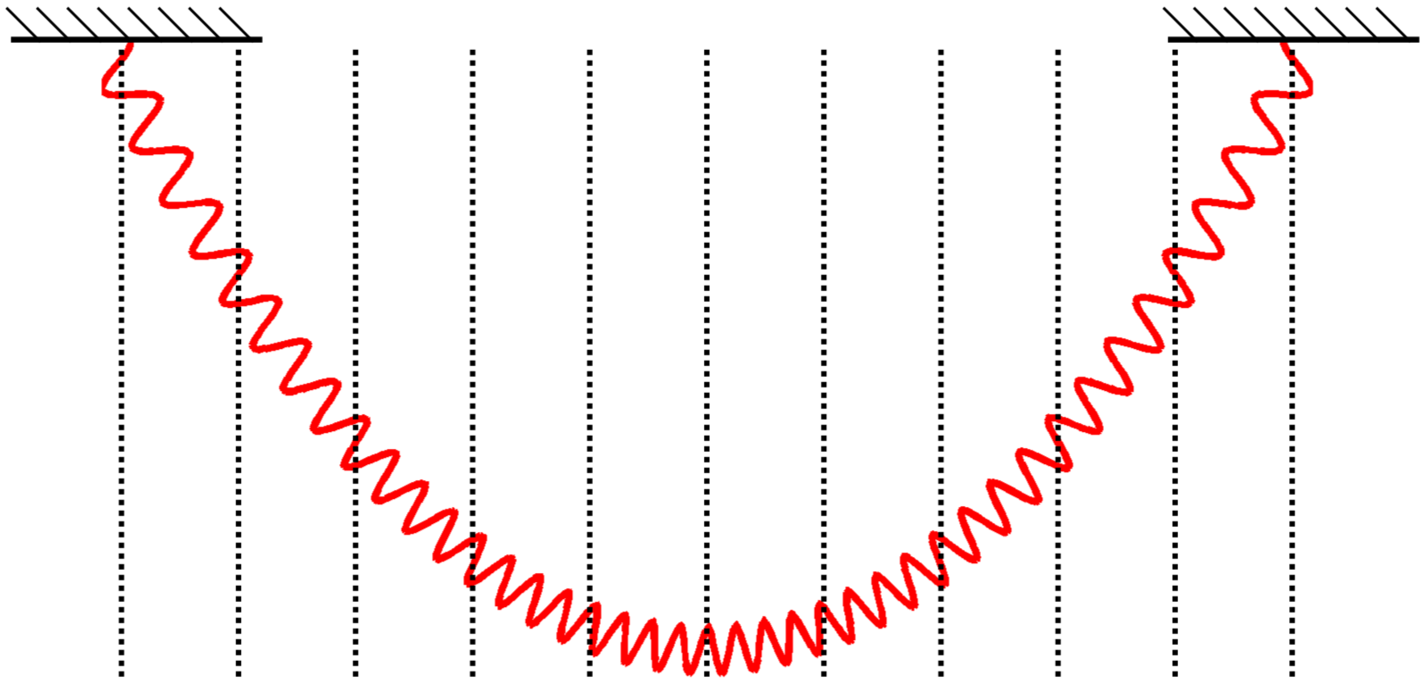
Tehát a slinky-t nem így kell egyenlő tömegű darabkákra felosztani:



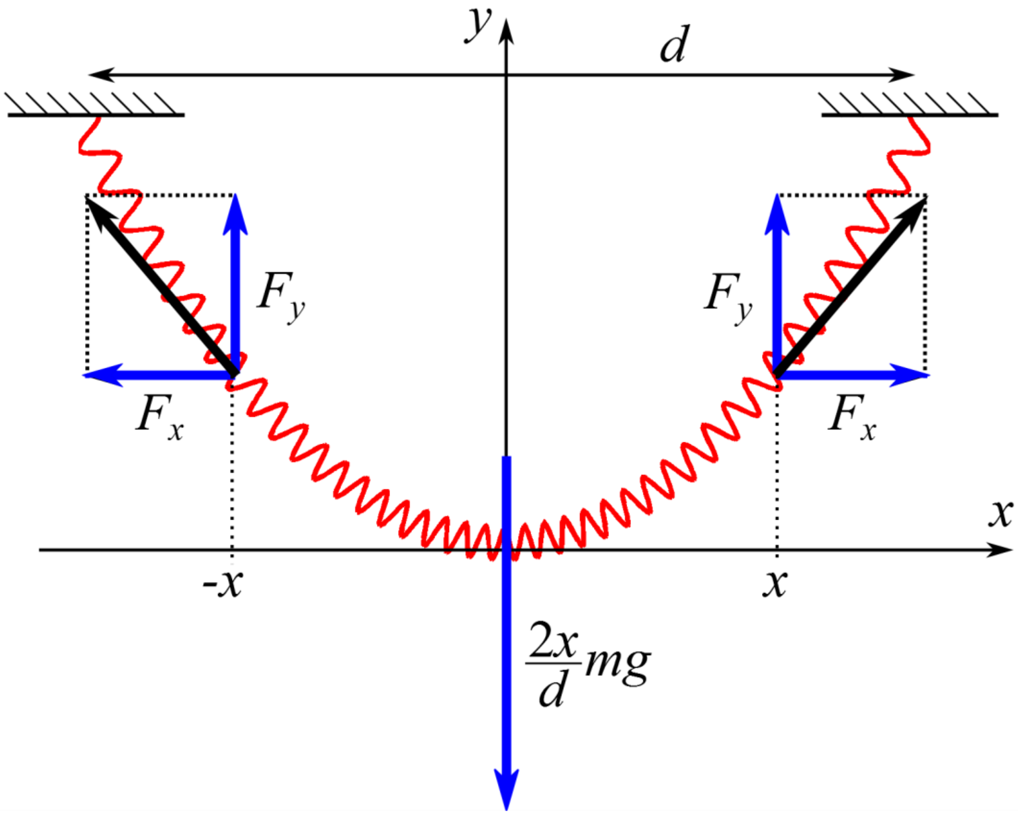
Tehát a slinky-t nem így kell egyenlő tömegű darabkákra felosztani:



hanem így:



Tehát a slinky tetszőleges (nem feltétlenül kicsi) darabjának tömege arányos a darab vízszintes vetületével!



$$2F_y = \frac{2x}{d}mg,$$

itt *m* a teljes slinky tömege.

Másrészt:

$$F_x = D^*\Delta x = ND \cdot \Delta x = D \cdot d$$

A feszítőerő érintőirányú, ezért a slinky meredeksége az x helyen:

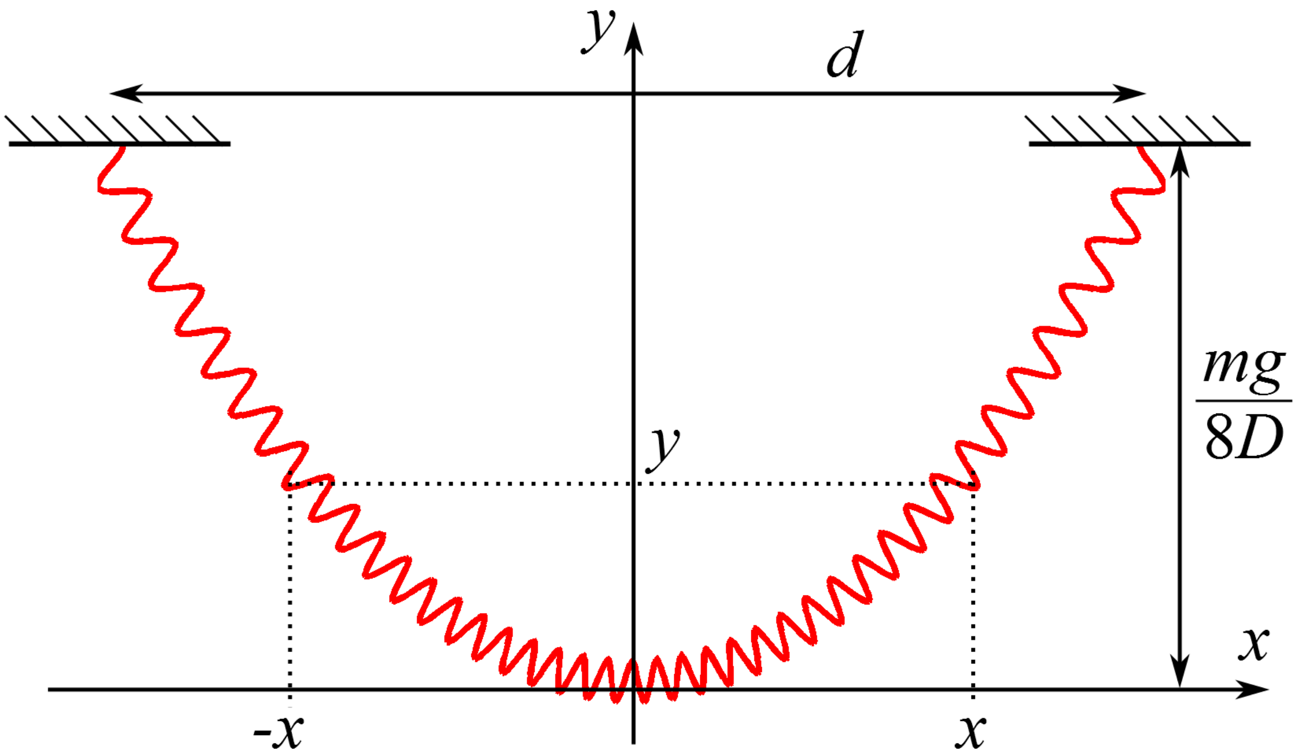
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{F_y}{F_x} = \frac{mg}{Dd^2} \cdot x$$

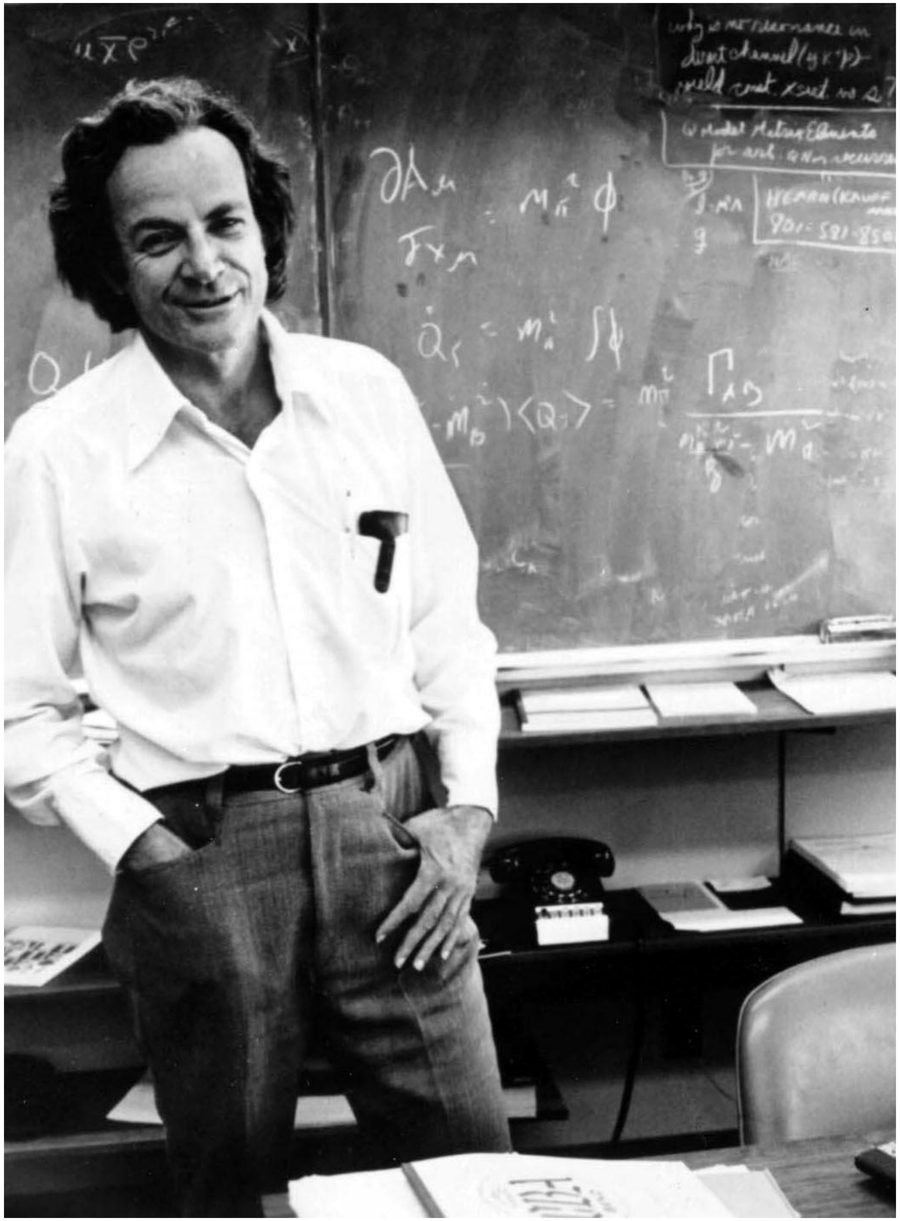
Keressük az *y(x)* függvényt. **Analógia:** ez az egyenlet éppen olyan, mint az egyenletesen gyorsuló mozgás sebessége az idő függvényében:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = a \cdot t \rightarrow x = \frac{a}{2}t^2 \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{mg}{Dd^2} \cdot x \rightarrow y = \frac{mg}{2Dd^2}x^2$$

Tehát a slinky alakja **parabola!**

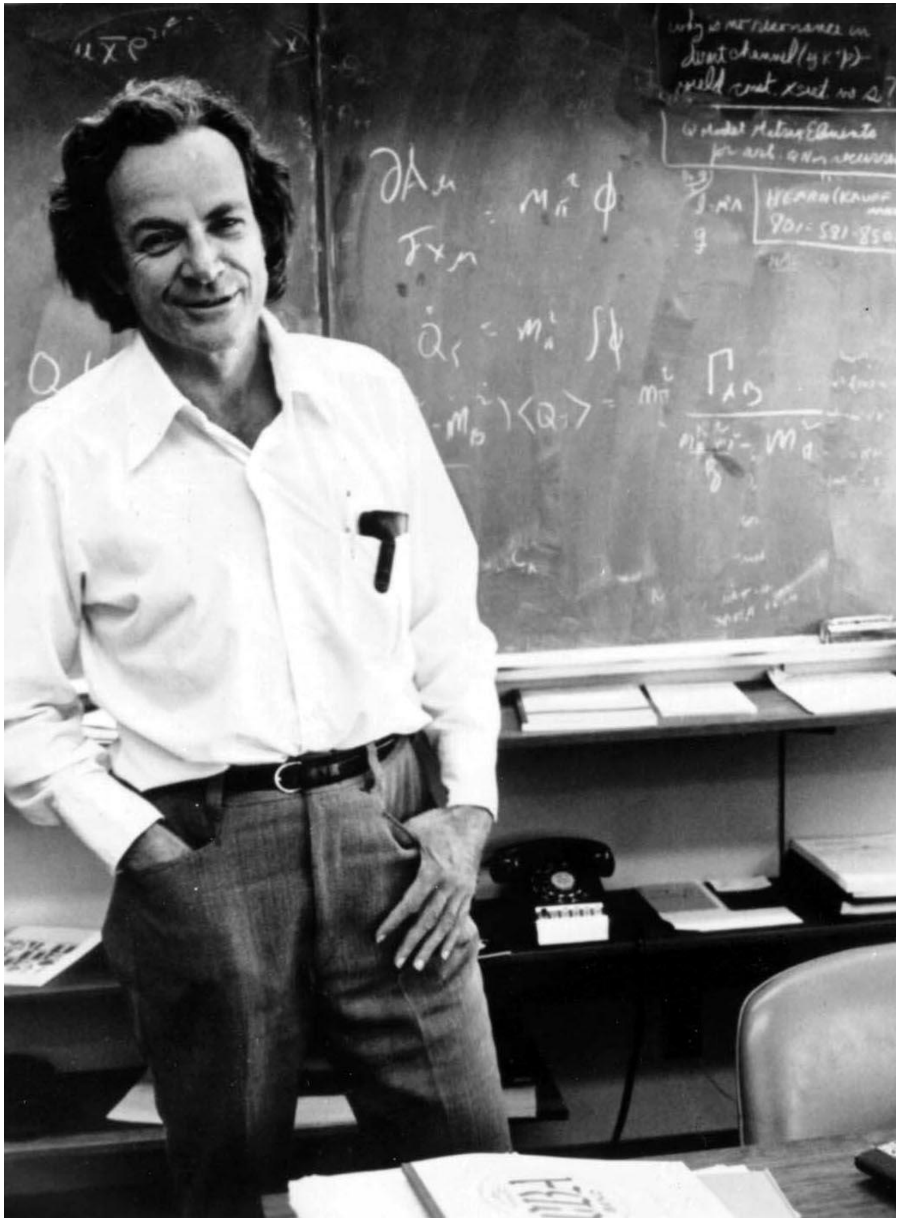
$$y = \frac{mg}{2Dd^2} x^2$$





“It doesn't matter how beautiful your theory is, it doesn't matter how smart you are. If it doesn't agree with experiment, it's wrong”

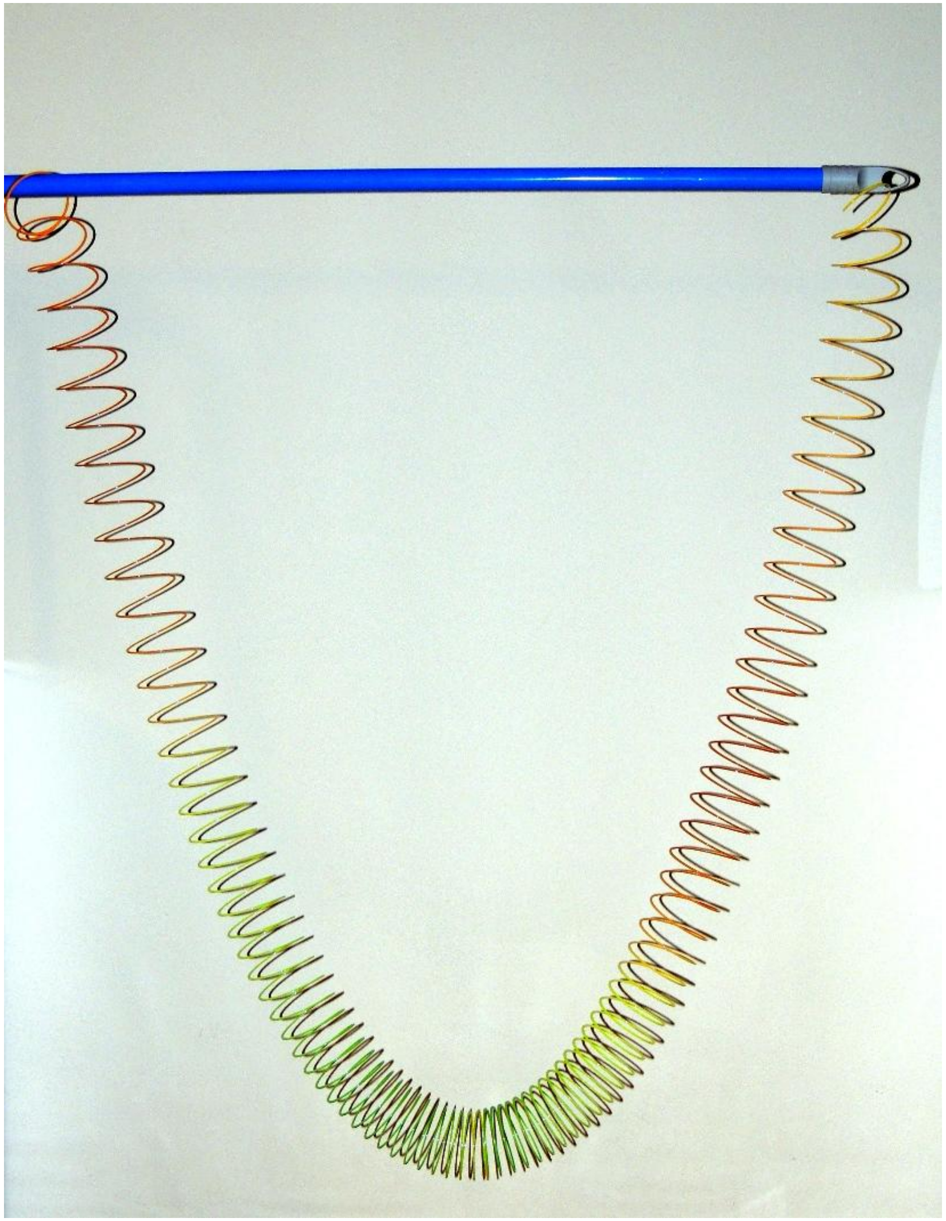
Richard P. Feynman

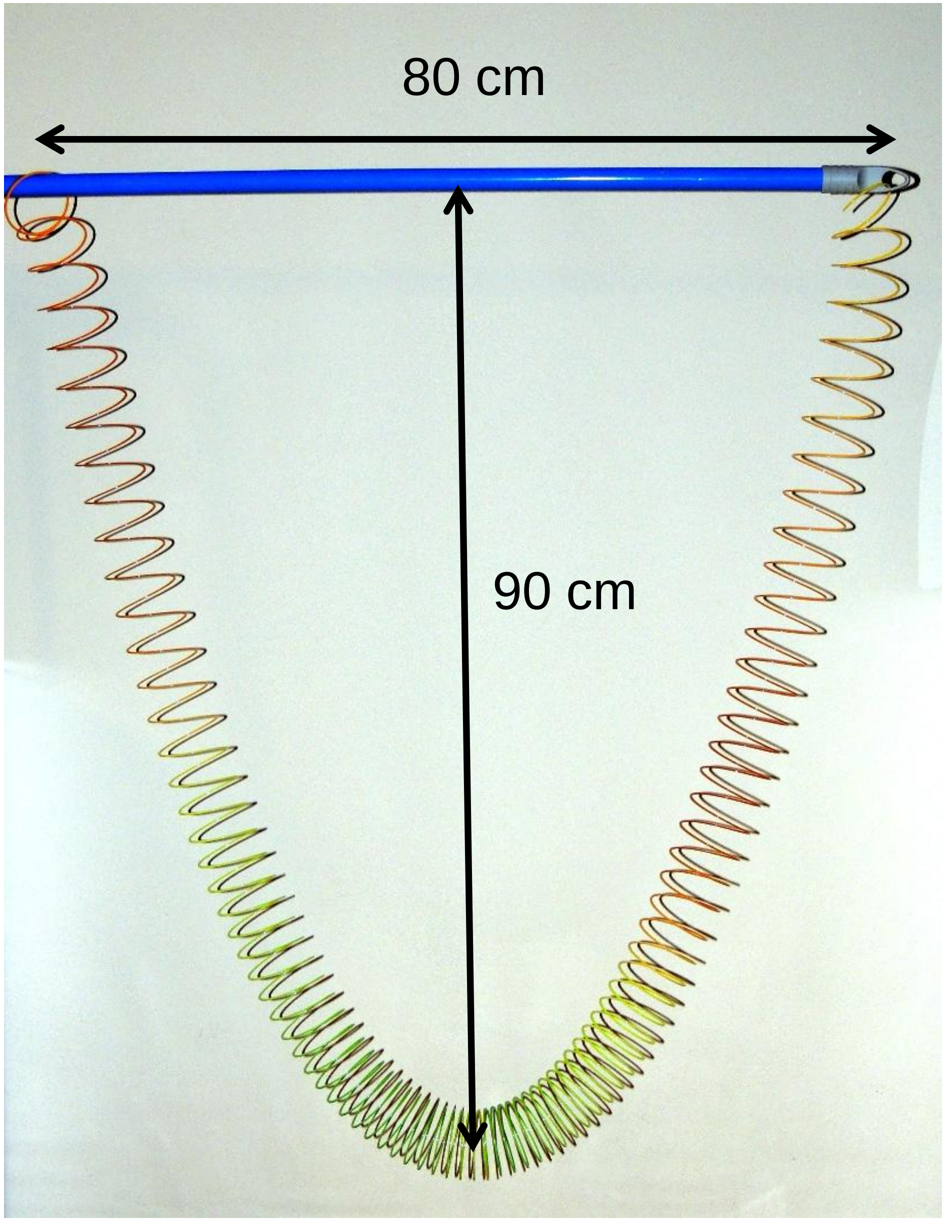


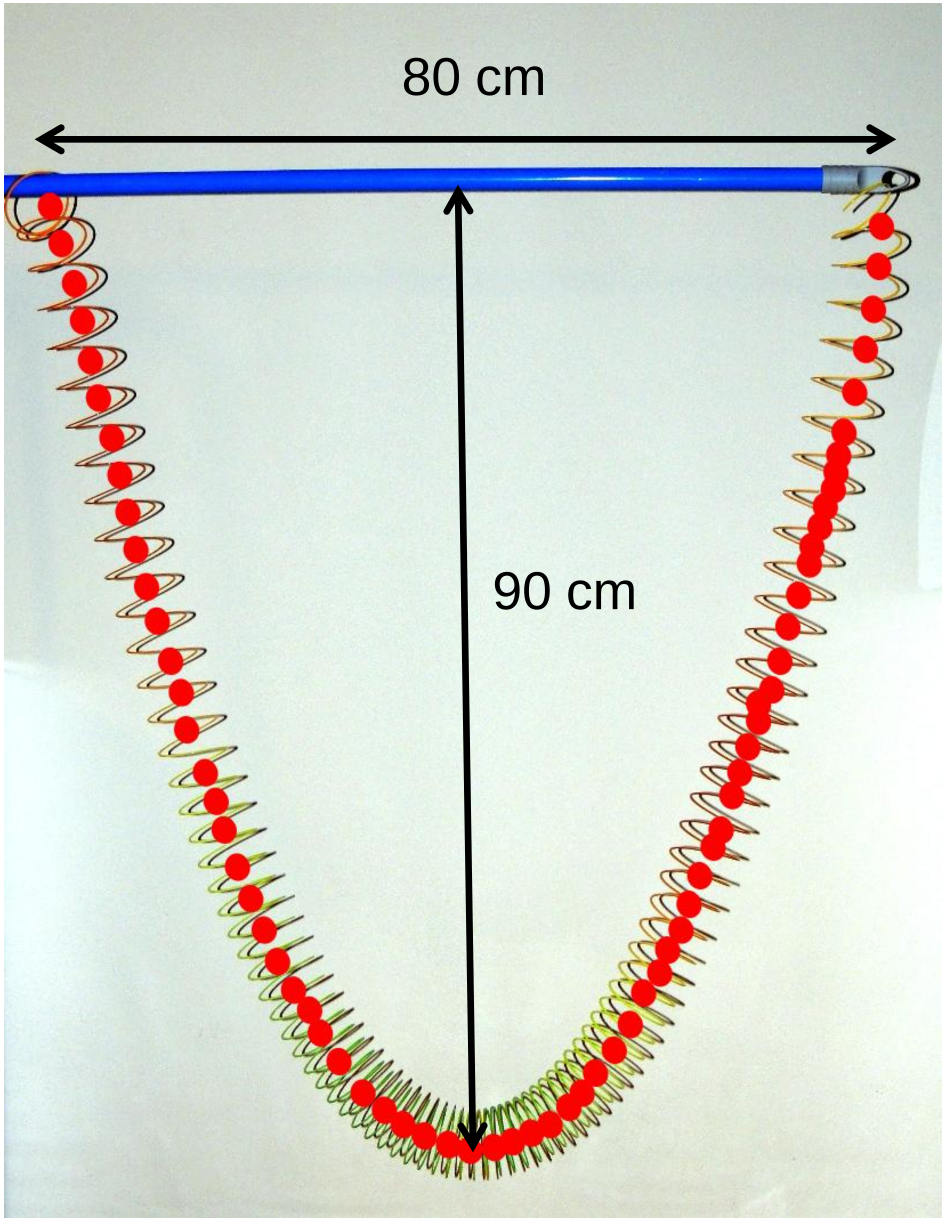
“It doesn't matter how beautiful your theory is, it doesn't matter how smart you are. If it doesn't agree with experiment, it's wrong”

Richard P. Feynman

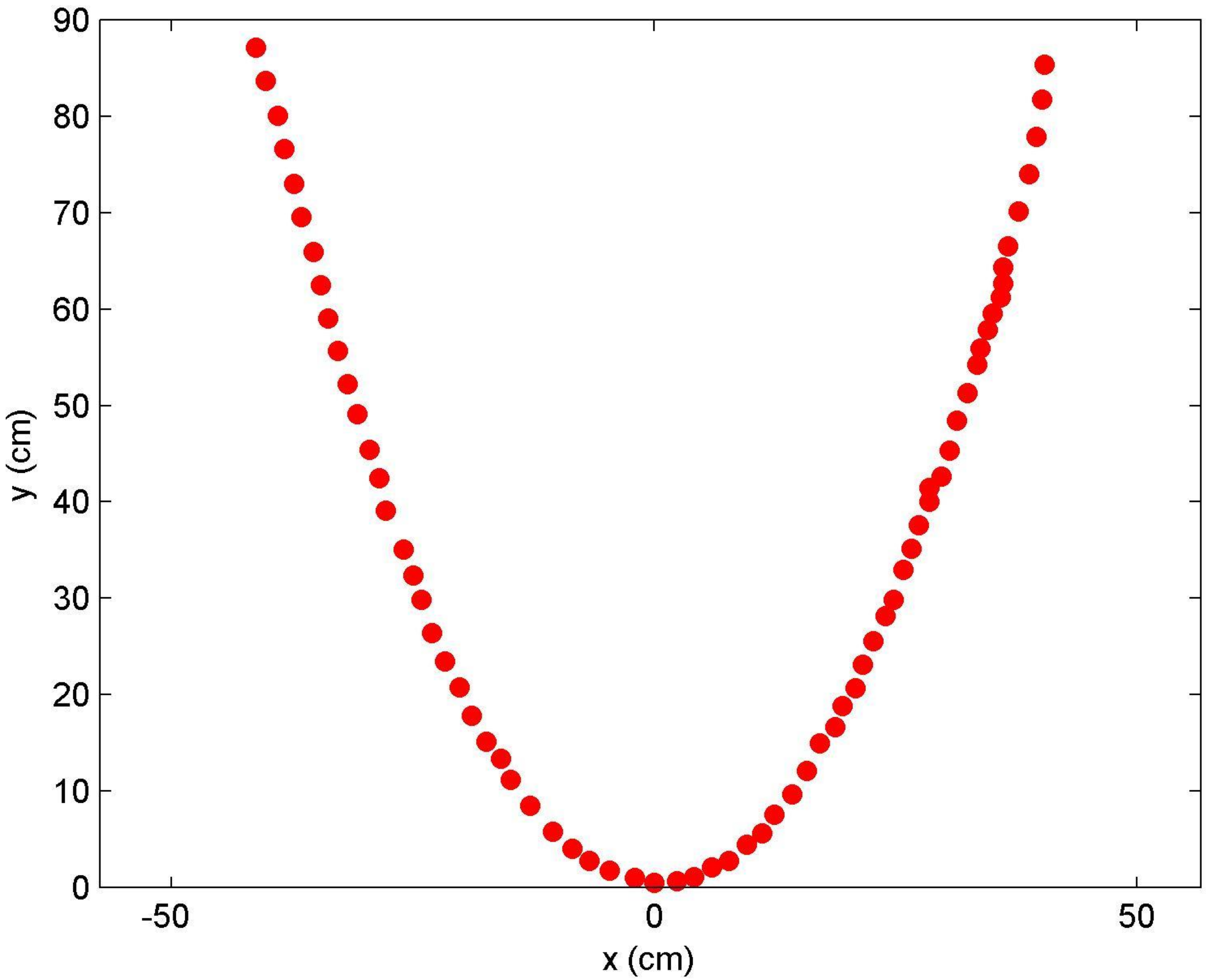
Nézzük meg, mennyire működik az elméletünk!



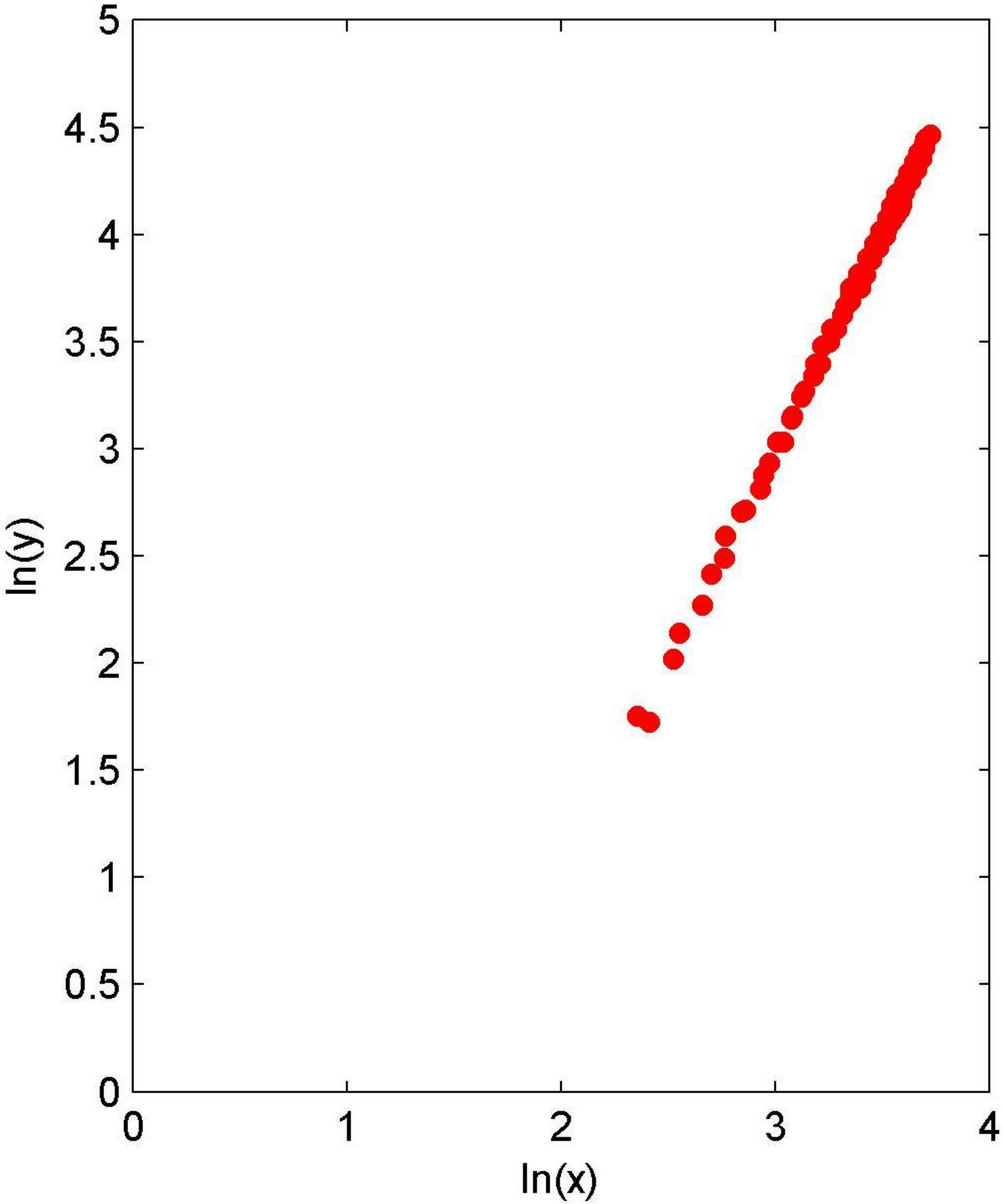

80 cm
90 cm



80 cm
90 cm



x (cm)	y (cm)
0,0	0,5
2,3	0,7
4,1	1,1
6,0	2,1
7,8	2,8
9,6	4,4
11,1	5,6
12,4	7,5
14,3	9,7
15,8	12,1
17,2	15,0
18,7	16,6
19,5	18,8
20,8	20,7
21,6	23,1
22,7	25,5
24,0	28,2



Az elmélet szerint parabola alakot várunk, azaz:

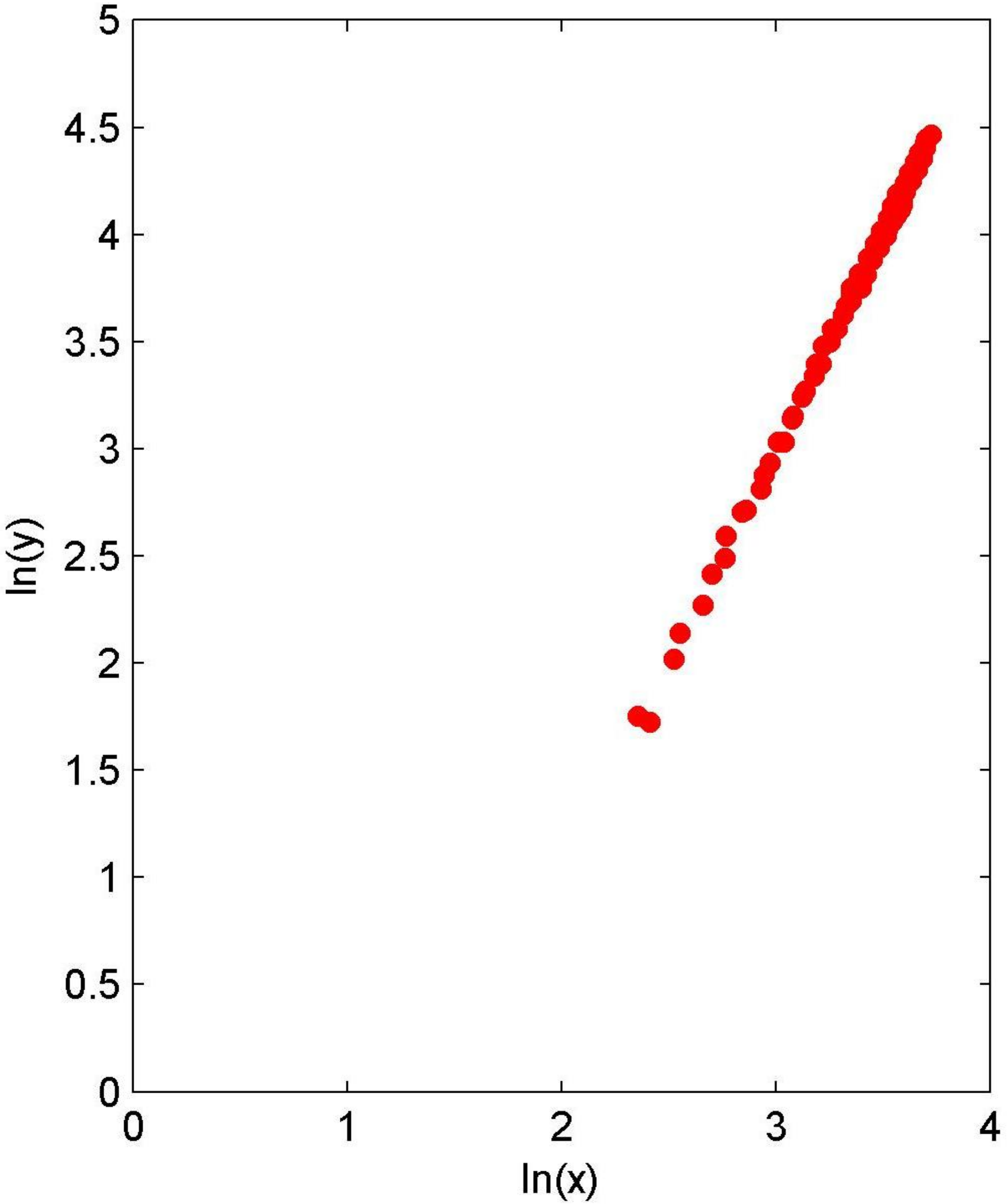
$$y = ax^n,$$

ahol $n = 2$.

Vegyük mindkét oldal logaritmusát!

$$\ln y = \ln a + n \ln x$$

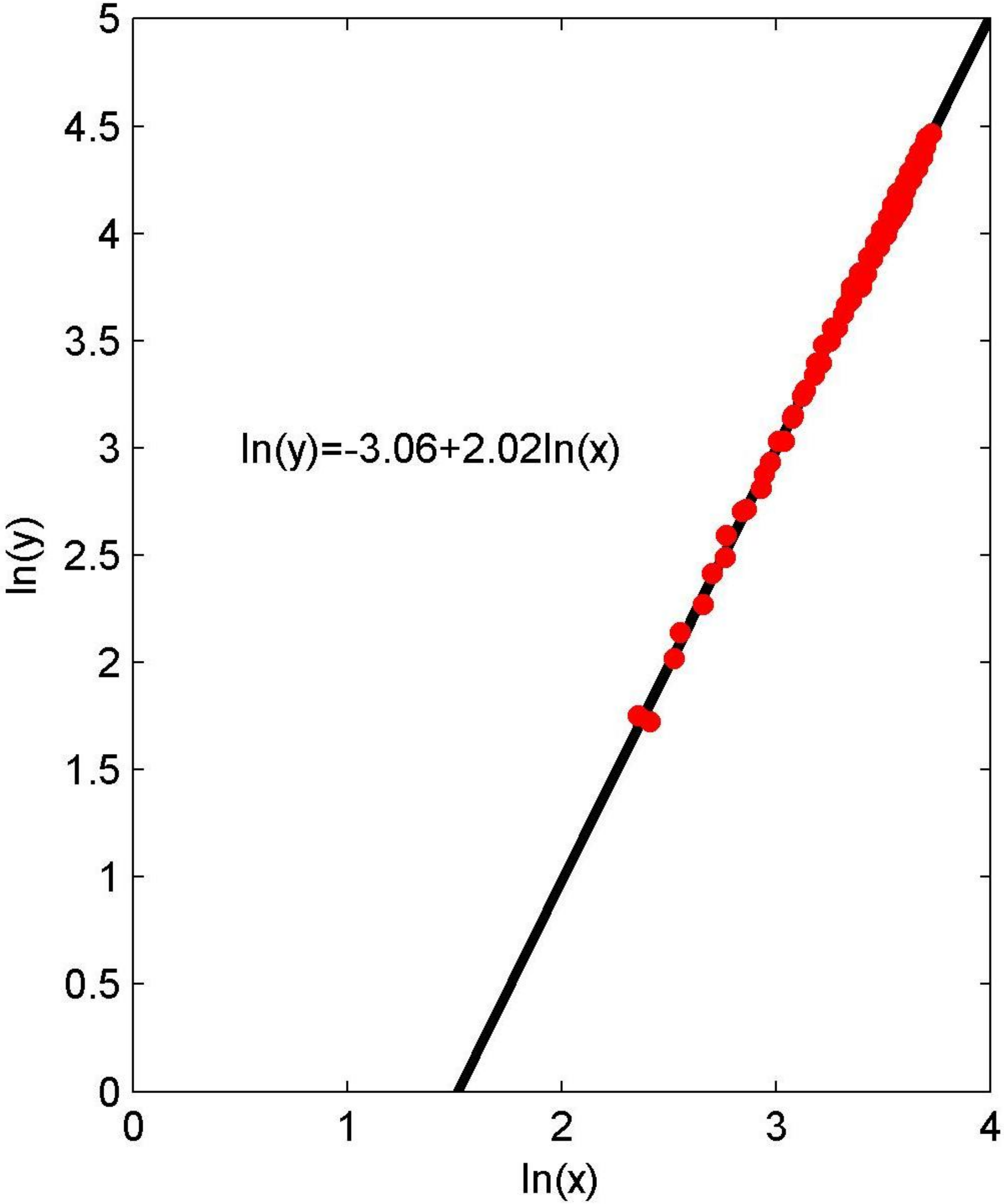
Ha tehát ln(y)-t ábrázoljuk ln(x) függvényében, egy egyenest kell kapnunk, aminek meredeksége megadja az empírikus kitevőt.



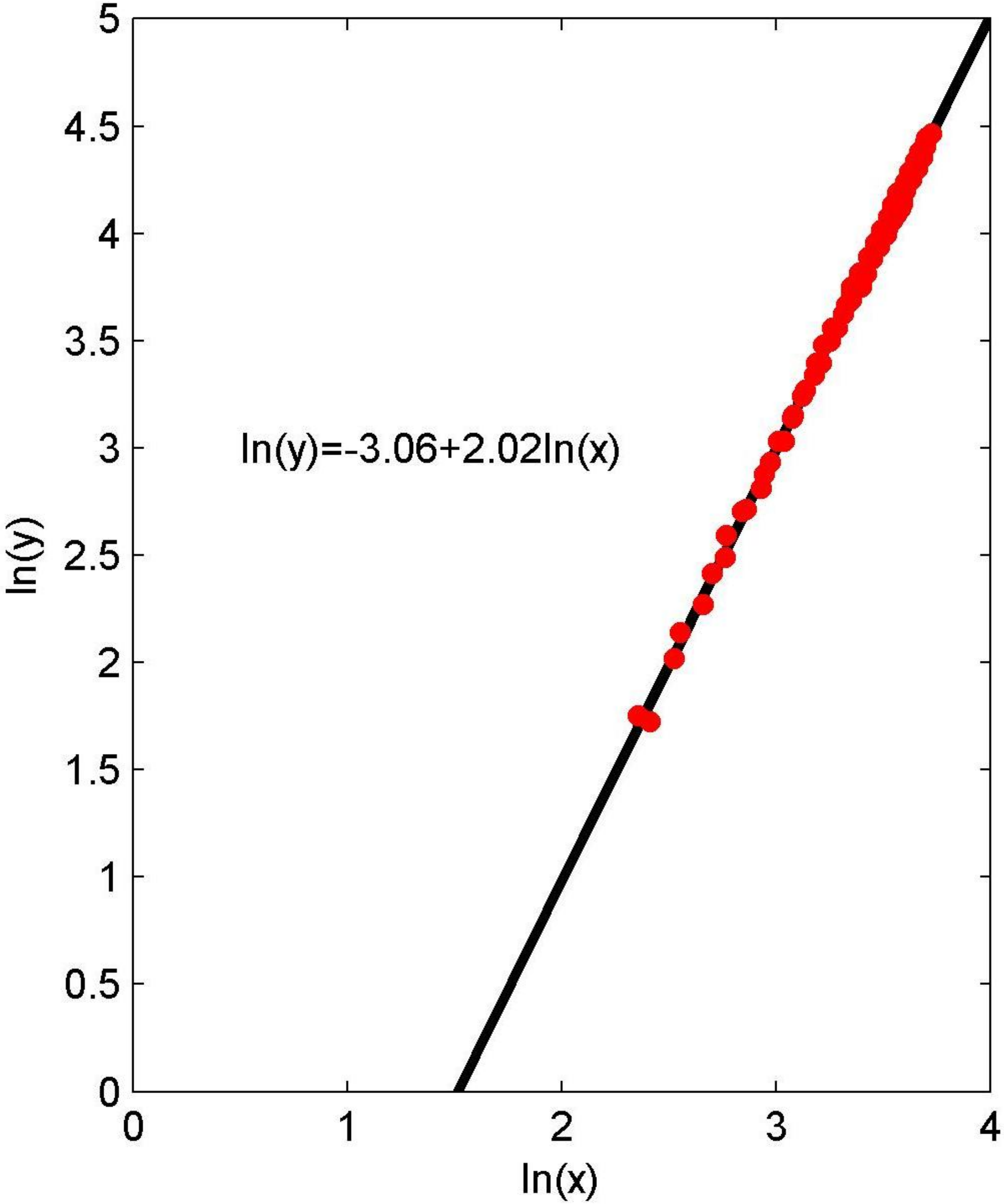
Az elmélet szerint parabola alakot várunk, azaz:

$$y = ax^n,$$

ahol $n = 2$.



ln(y)=-3.06+2.02ln(x)
ln(y)
ln(x)
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
0
1
2
3
4



Az egyenes jól illeszkedik, leolvasható az egyenlete:

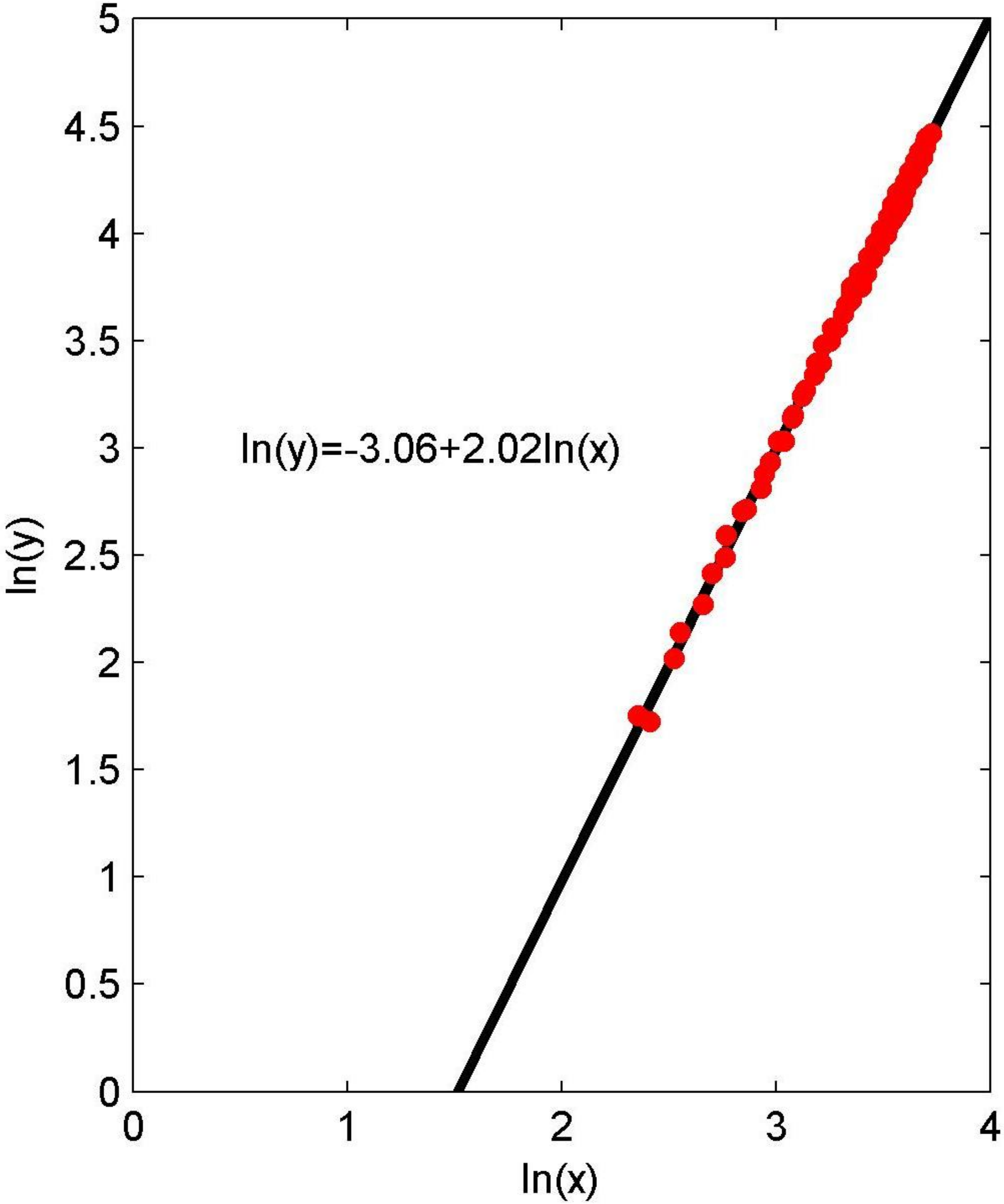
$$\ln y = -3.06 + 2.02 \ln x$$

$$\ln y = \ln a + n \ln x$$

Az empírikus kitevő **2.02**!

$$n = 2.02$$

$$a = \exp(-3.06) = 0.047\ (\mathrm{cm}^{-1})$$

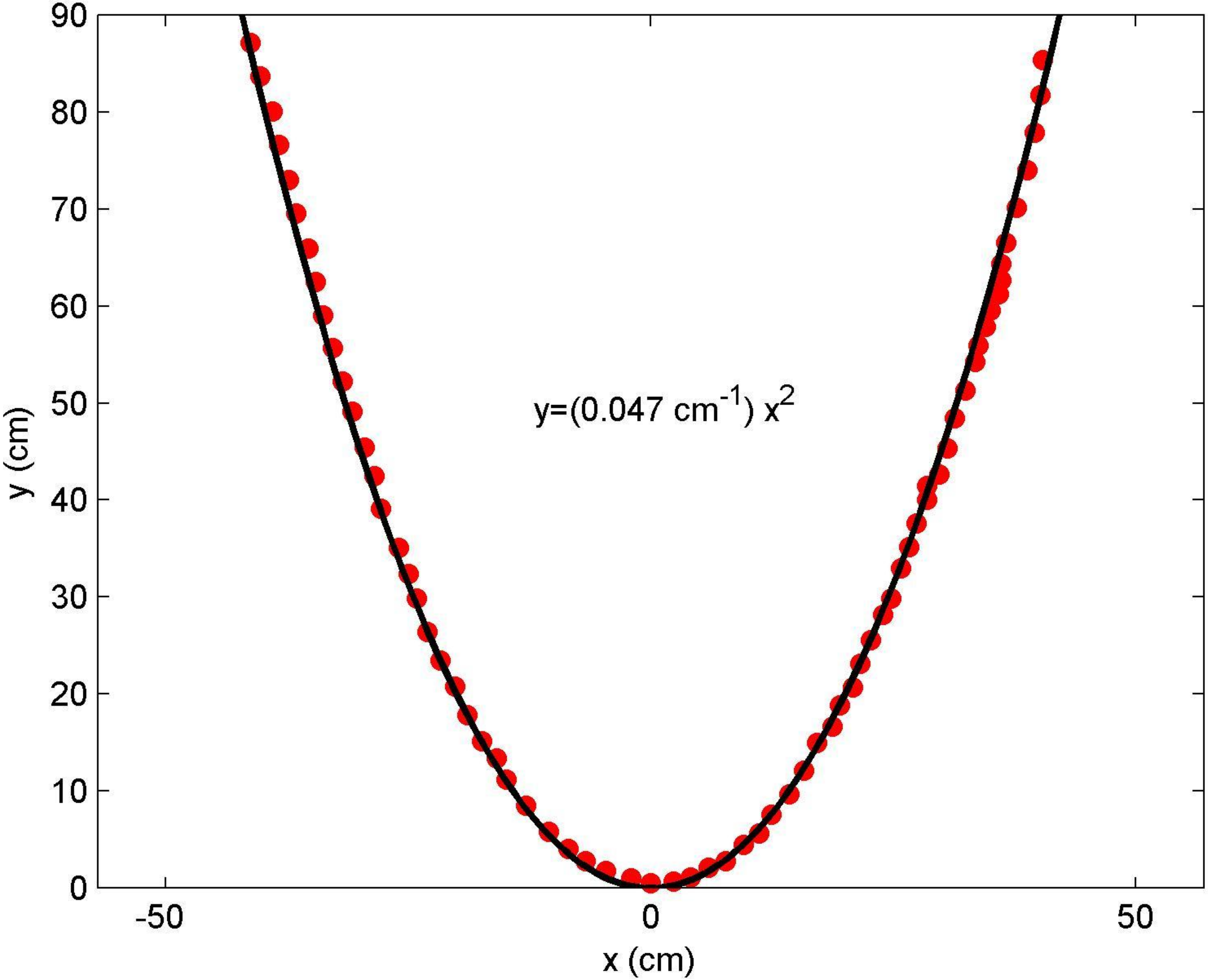


Az egyenes jól illeszkedik, leolvasható az egyenlete:

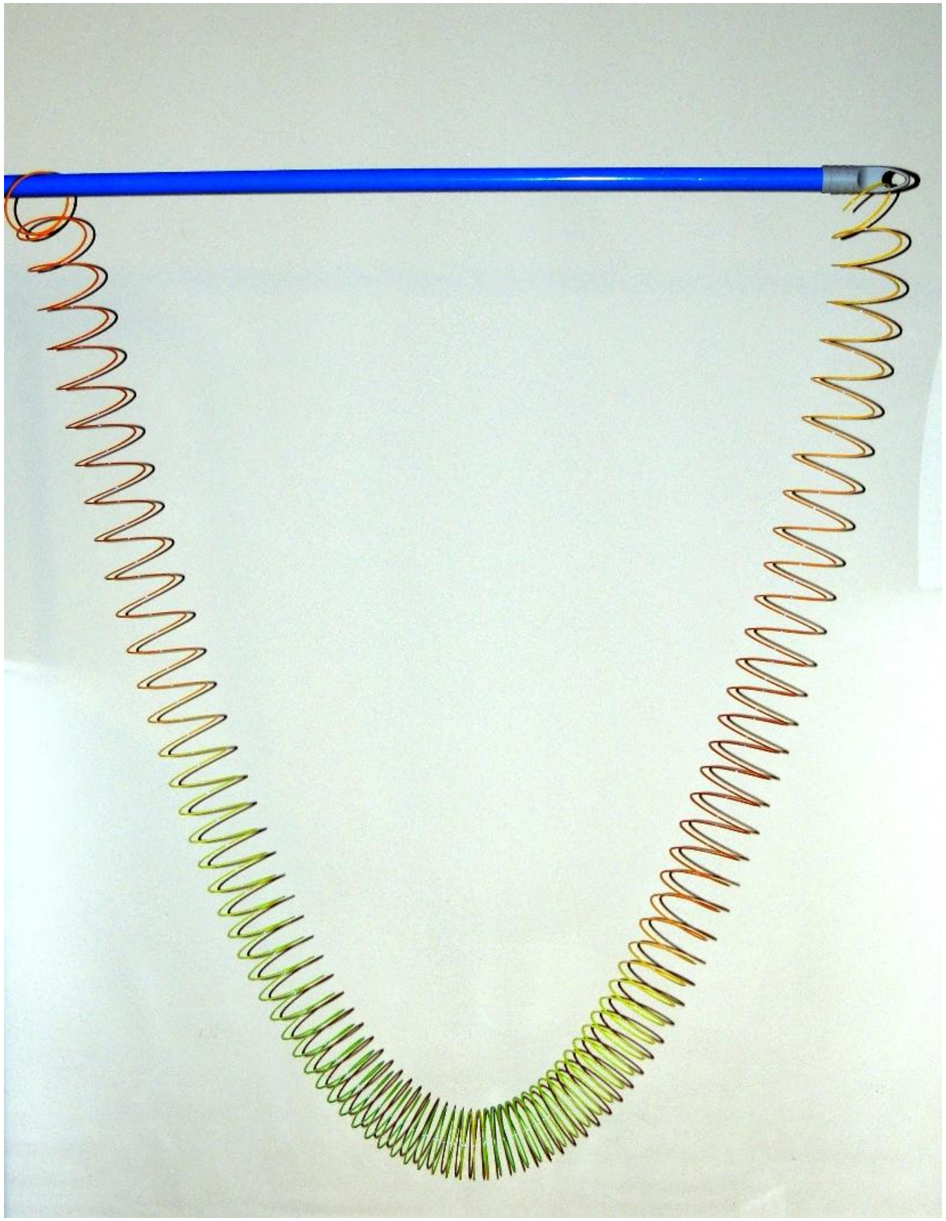
$$\ln y = -3.06 + 2.02 \ln x$$

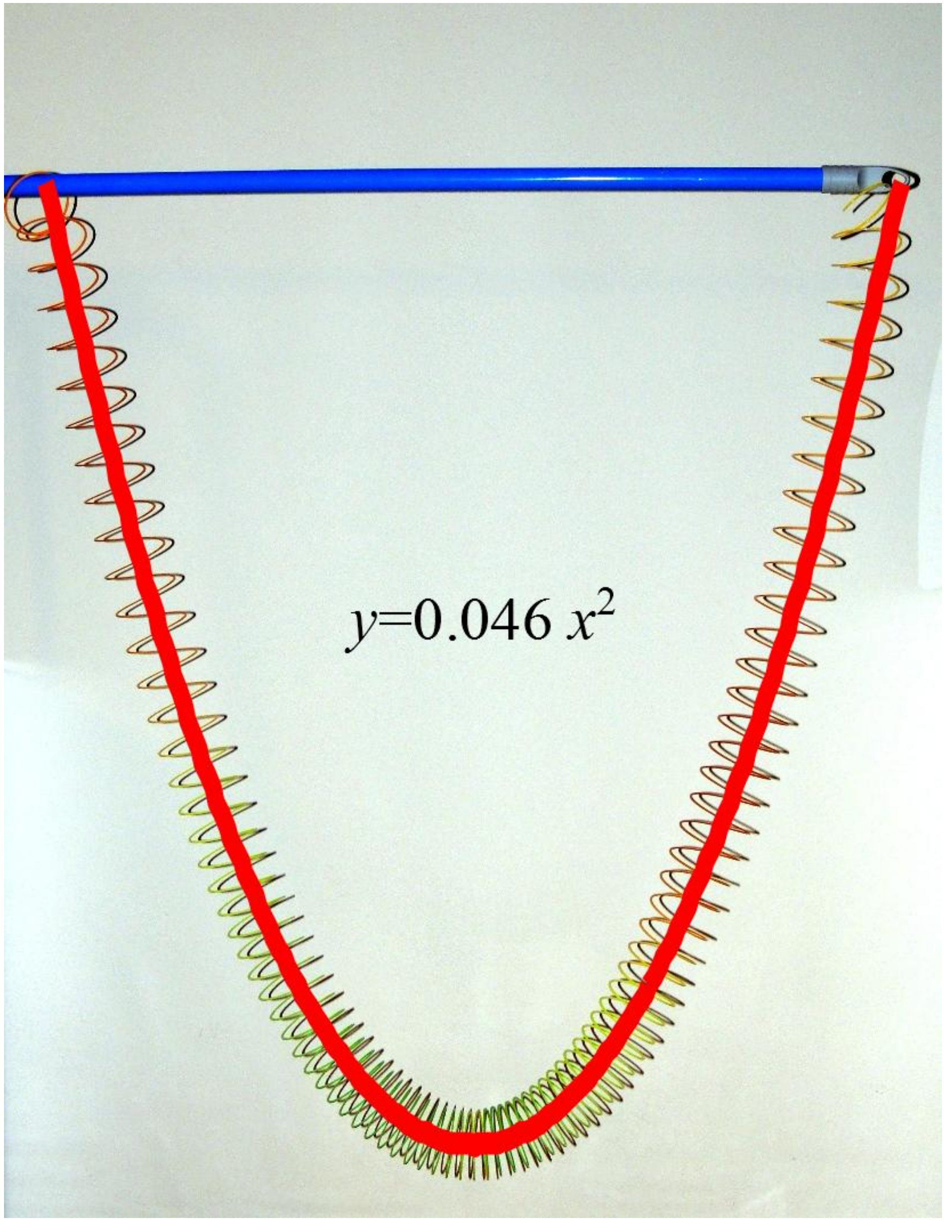
$$\ln y = \ln a + n \ln x$$

Az empírikus kitevő **2.02**!

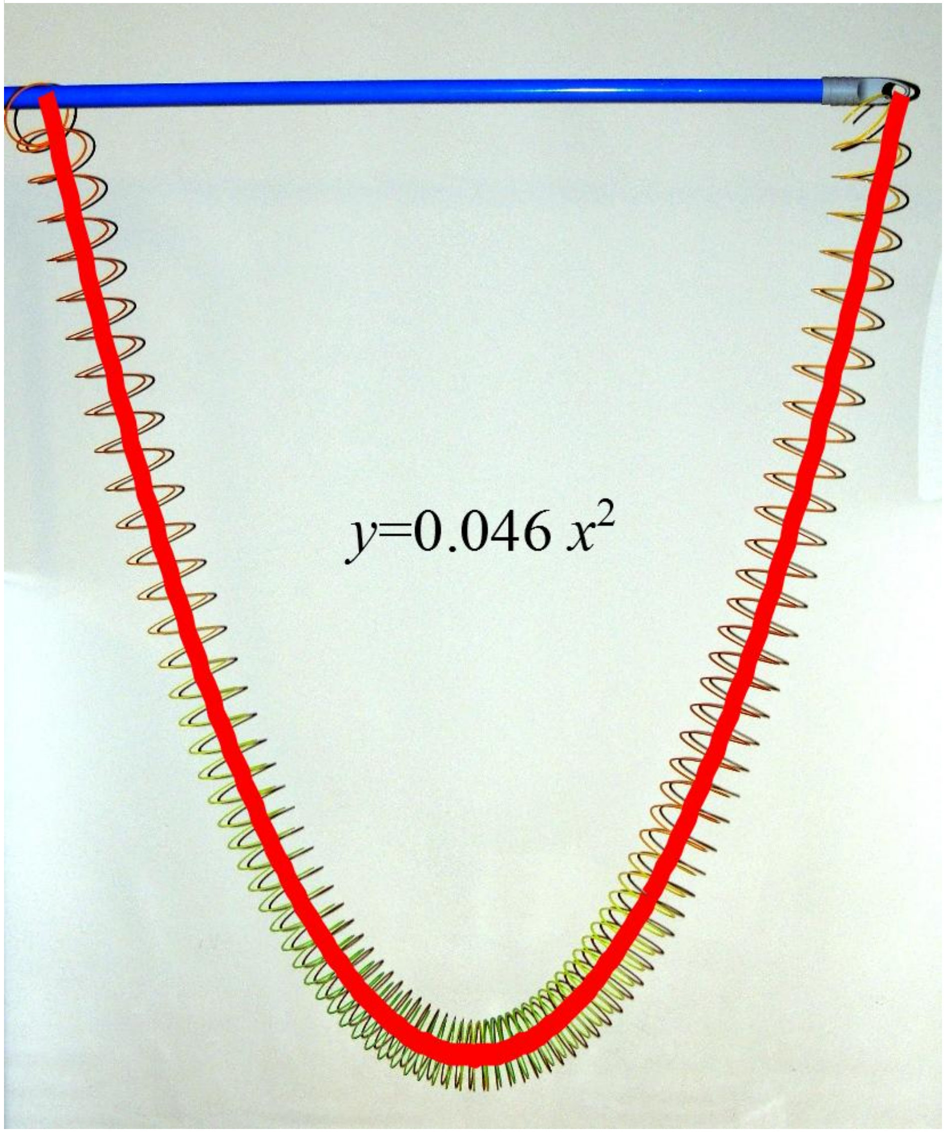


y=(0.047 cm-1) x2
y (cm)
x (cm)
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
-50
0
50

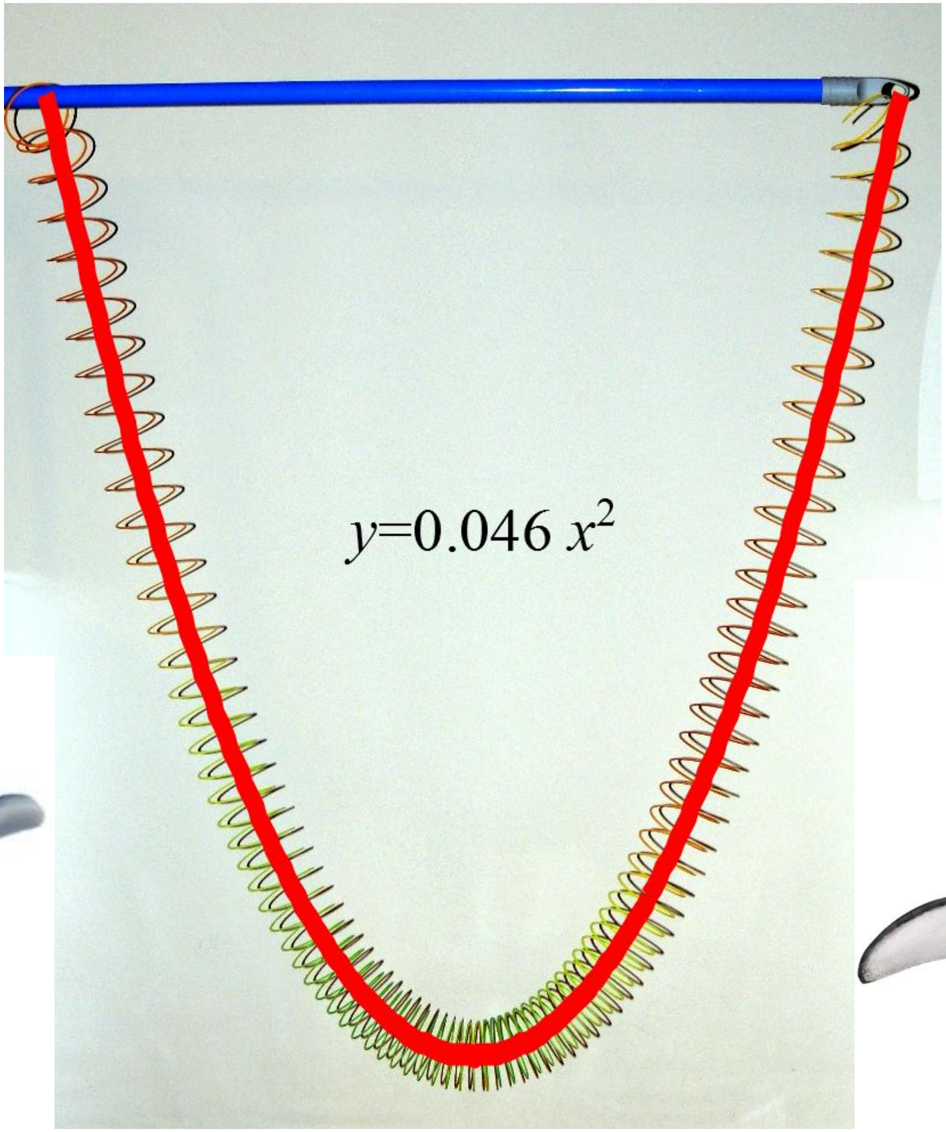



y=0.046 x^2

Működik a fizika!

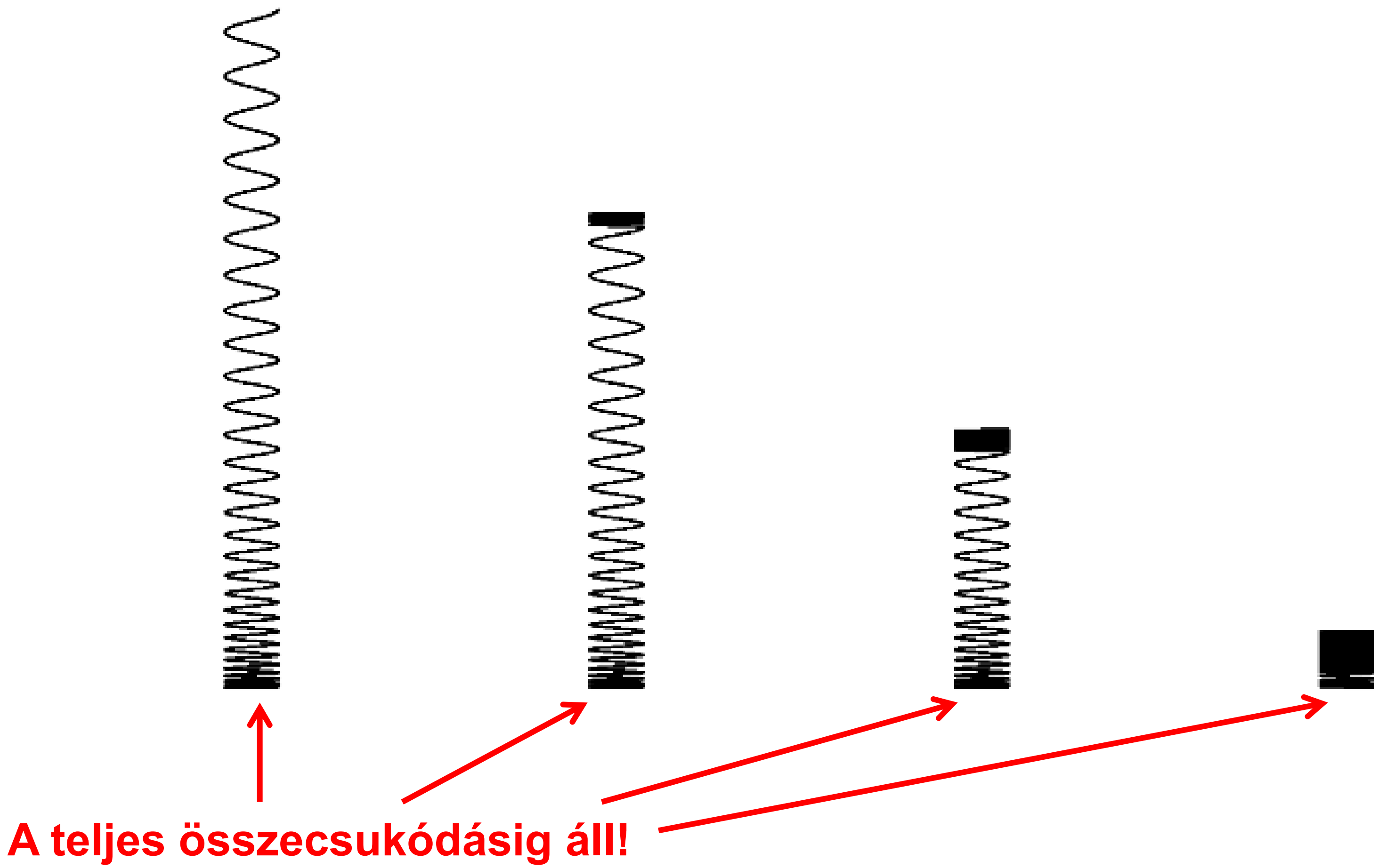


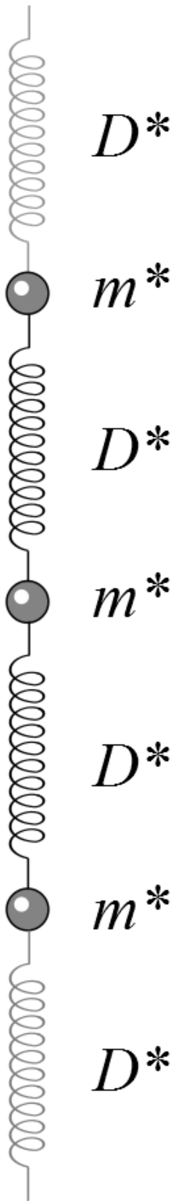
Működik a fizika!



3. Fejtörő. A slinky-t függőlegesen lelógatjuk majd elengedjük. Milyen mozgást végez a rugó? Mekkora lesz a sebessége a teljes összecsukódás után? Vizsgáljuk meg a mozgás energiaviszonyait!

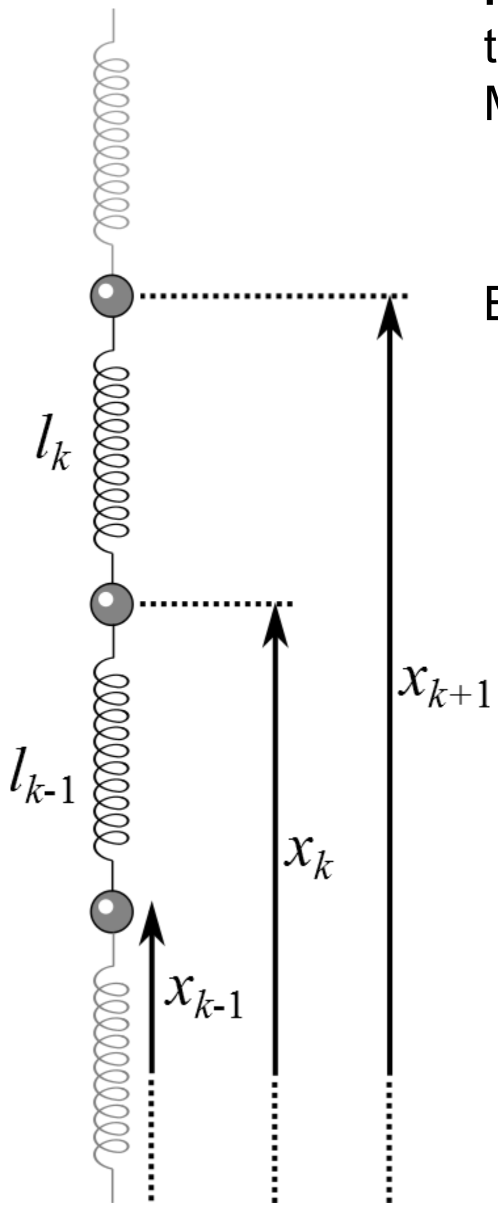
3. Fejtörő. A slinky-t függőlegesen lelógatjuk majd elengedjük. Milyen mozgást végez a rugó? Mekkora lesz a sebessége a teljes összecsukódás után? Vizsgáljuk meg a mozgás energiaviszonyait!





Modell: tekintsük úgy, mintha a slinky *N* darab egyforma tömegpontból állna, melyeket egyforma rugók kötnek össze! Minél nagyobb *N*, annál jobb a közelítés.

$$m^* = m / N, \qquad D^* = ND$$

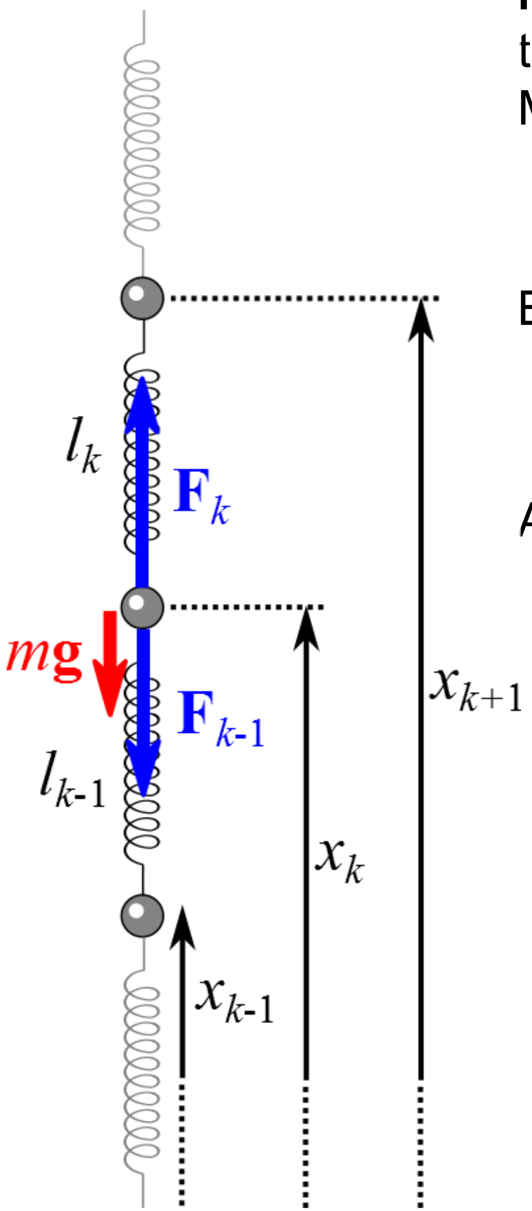


Modell: tekintsük úgy, mintha a slinky *N* darab egyforma tömegpontból állna, melyeket egyforma rugók kötnek össze! Minél nagyobb *N*, annál jobb a közelítés.

$$m^* = m / N, \qquad D^* = ND$$

Bevezetjük az ábrán látható koordinátákat:

$$l_k = x_{k+1} - x_k, \quad l_{k-1} = x_k - x_{k-1}$$



Modell: tekintsük úgy, mintha a slinky *N* darab egyforma tömegpontból állna, melyeket egyforma rugók kötnek össze! Minél nagyobb *N*, annál jobb a közelítés.

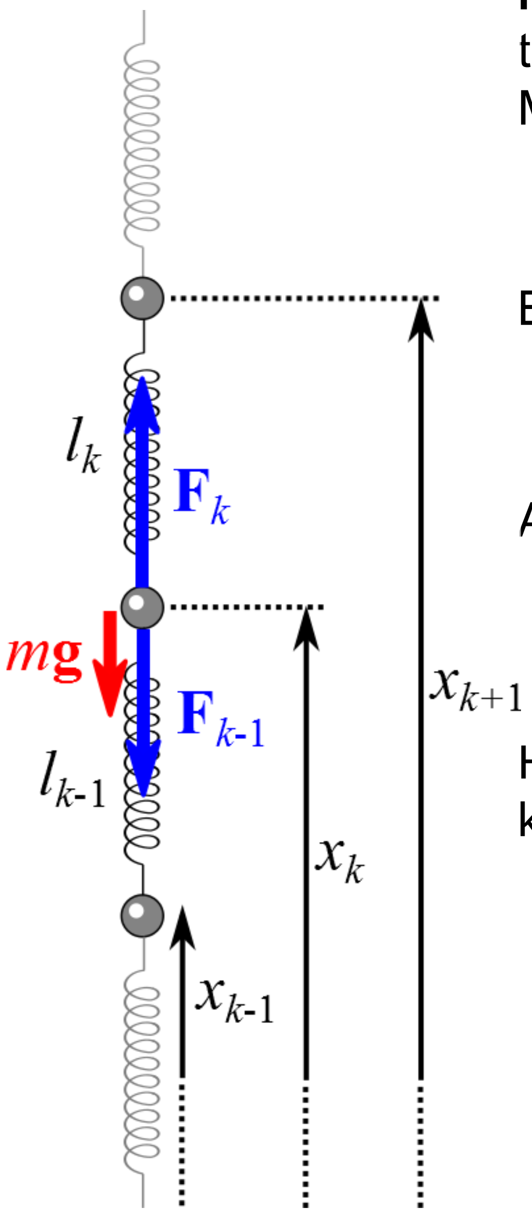
$$m^* = m/N, \qquad D^* = ND$$

Bevezetjük az ábrán látható koordinátákat:

$$l_k = x_{k+1} - x_k, \quad l_{k-1} = x_k - x_{k-1}$$

Alulról számolva a k-adik golyóra ható eredő erő:

$$m^* a_k = m^* g + F_{k-1} - F_k$$



Modell: tekintsük úgy, mintha a slinky *N* darab egyforma tömegpontból állna, melyeket egyforma rugók kötnek össze! Minél nagyobb *N*, annál jobb a közelítés.

$$m^* = m / N, \qquad D^* = ND$$

Bevezetjük az ábrán látható koordinátákat:

$$l_k = x_{k+1} - x_k, \qquad l_{k-1} = x_k - x_{k-1}$$

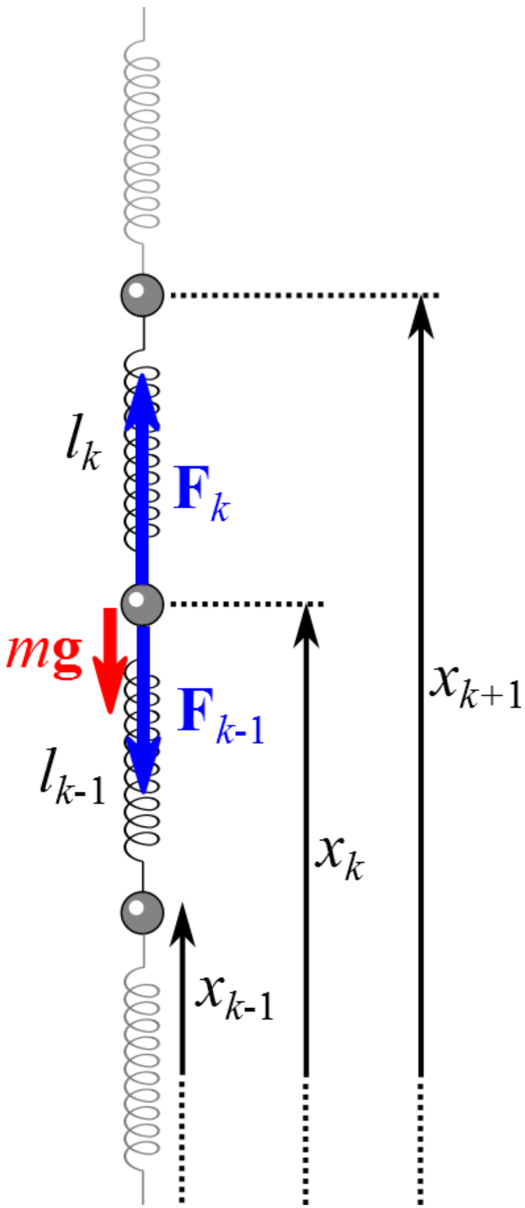
Alulról számolva a k-adik golyóra ható eredő erő:

$$m^* a_k = m^* g + F_{k-1} - F_k$$

Hooke-törvényt és a rugók hosszát a koordinátákkal kifejezve kapjuk:

$$a_k = g + \frac{D^*}{m^*}\left(x_k - x_{k-1}\right) - \frac{D^*}{m^*}\left(x_{k+1} - x_k\right)$$

$$a_k = \ddot{x}_k = g - \frac{D^*}{m^*}\left(x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}\right)$$



$$\ddot{x}_k = g - \frac{D^*}{m^*}\left(x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}\right)$$

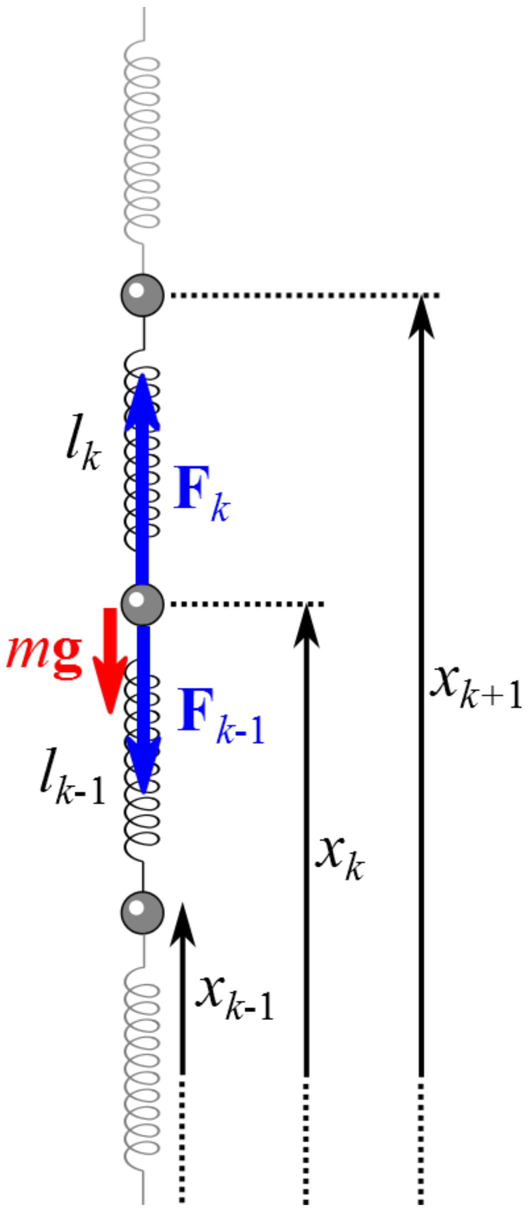
Ez az egyenlet tömörebben is írható vektorok és mátrixok bevezetésével:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad \ddot{\mathbf{X}} = g\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} - \frac{D^*}{m^*}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix}\mathbf{X}$$

Kezdetben:

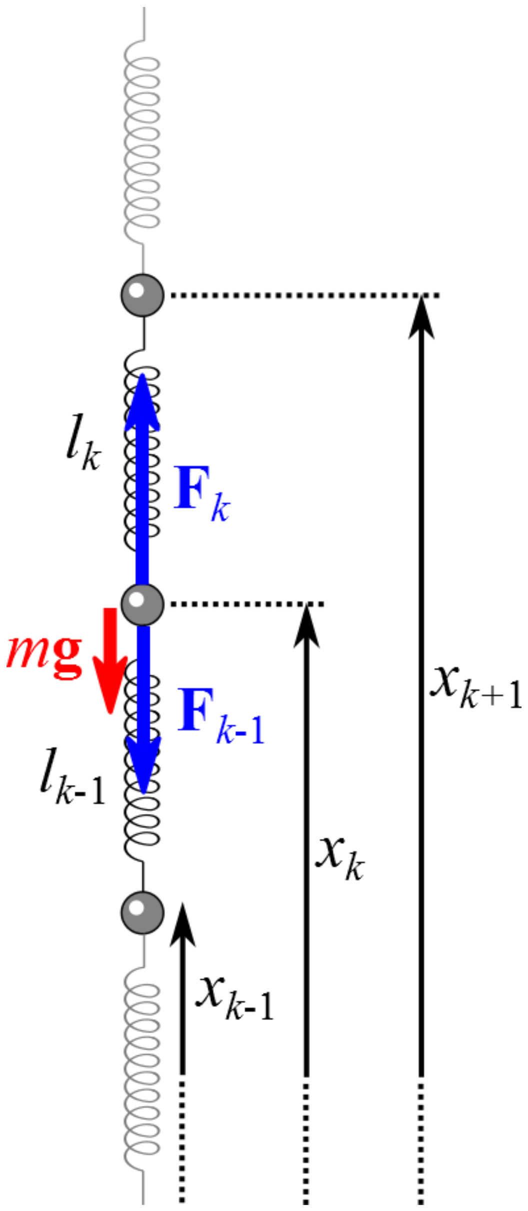
$$l_k^{(0)} = (k-1)\frac{m^* g}{D^*}, \quad x_k^{(0)} = \frac{k(k-1)}{2}\frac{m^* g}{D^*}, \quad \mathbf{X}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 6 \\ \vdots \end{pmatrix}\frac{m^* g}{D^*}$$

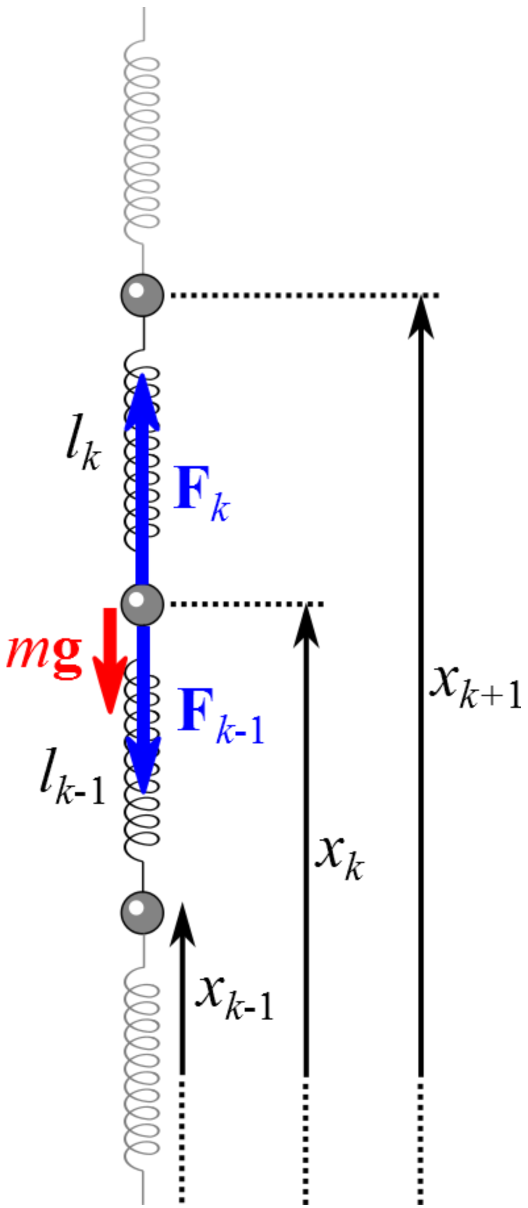
Hogyan lehet egy ilyen bonyolult mozgásegyenletet megoldani?



Hogyan lehet egy ilyen bonyolult mozgásegyenletet megoldani?

Numerikusan!



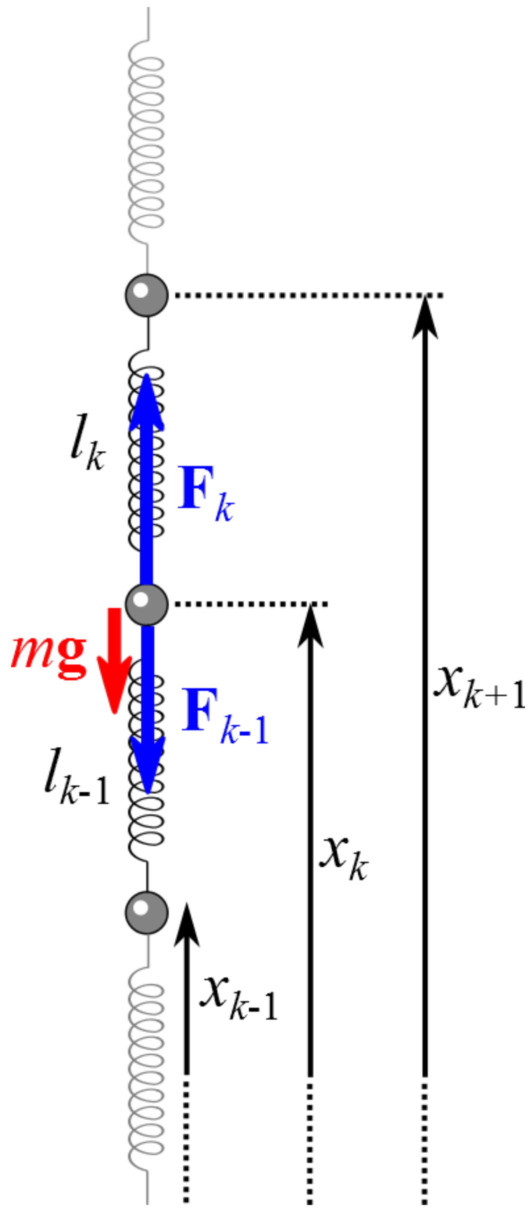


Hogyan lehet egy ilyen bonyolult mozgásegyenletet megoldani?

Numerikusan!

Legegyszerűbb, léptető algoritmus:

$$\mathbf{X}(t+\Delta t) = \mathbf{X}(t) + \dot{\mathbf{X}}(t)\Delta t$$
$$\dot{\mathbf{X}}(t+\Delta t) = \dot{\mathbf{X}}(t) + \ddot{\mathbf{X}}(t)\Delta t$$



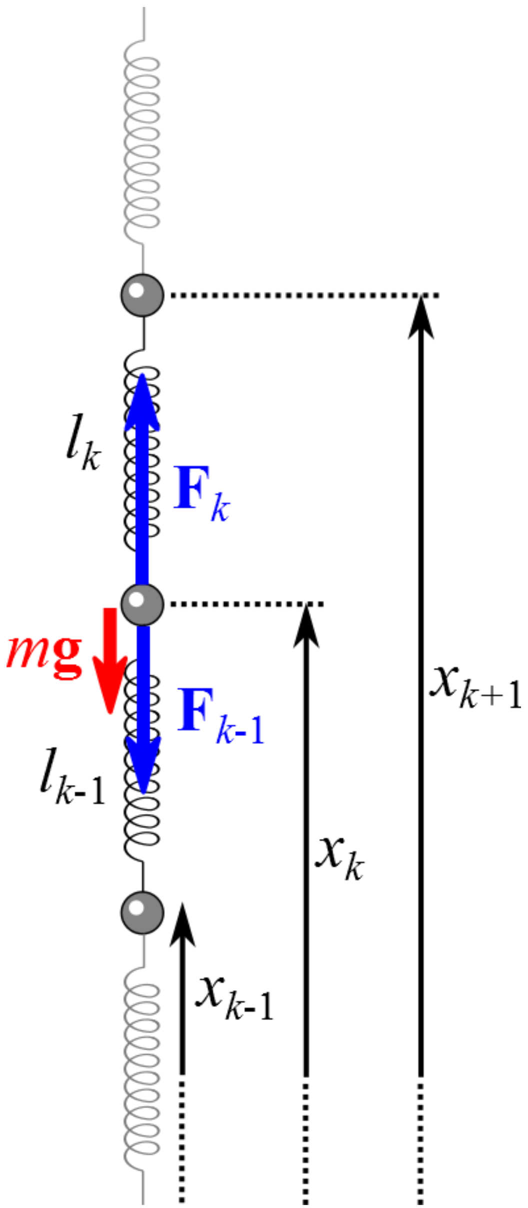
Hogyan lehet egy ilyen bonyolult mozgásegyenletet megoldani?

Numerikusan!

Legegyszerűbb, léptető algoritmus:

$$\mathbf{X}(t+\Delta t) = \mathbf{X}(t) + \dot{\mathbf{X}}(t)\Delta t$$
$$\dot{\mathbf{X}}(t+\Delta t) = \dot{\mathbf{X}}(t) + \ddot{\mathbf{X}}(t)\Delta t$$

Mit kapunk eredményül?



Hogyan lehet egy ilyen bonyolult mozgásegyenletet megoldani?

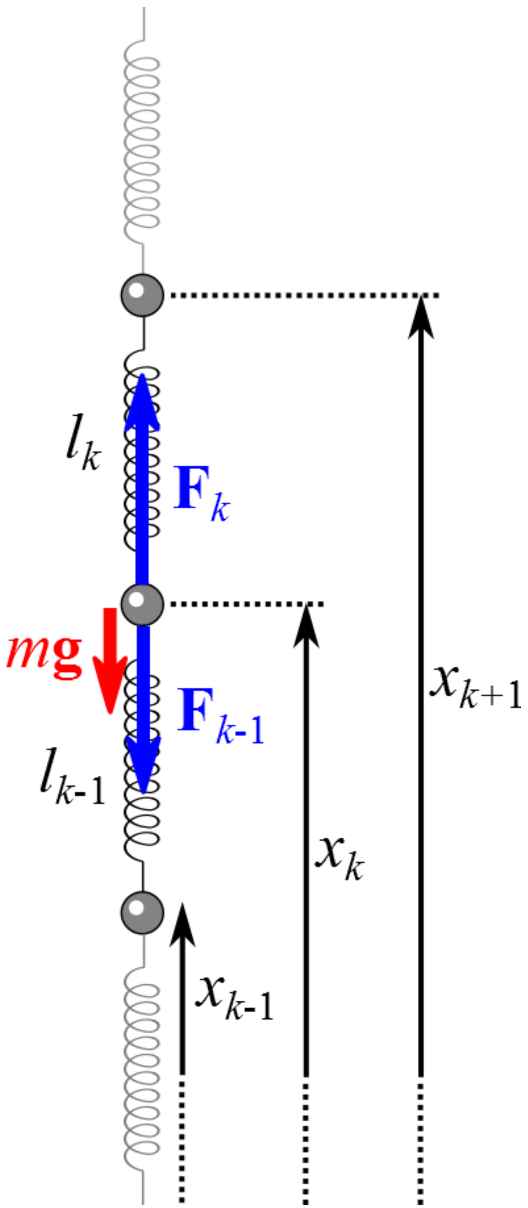
Numerikusan!

Legegyszerűbb, léptető algoritmus:

$$\mathbf{X}(t+\Delta t) = \mathbf{X}(t) + \dot{\mathbf{X}}(t)\Delta t$$
$$\dot{\mathbf{X}}(t+\Delta t) = \dot{\mathbf{X}}(t) + \ddot{\mathbf{X}}(t)\Delta t$$

Mit kapunk eredményül?

A menetek utolérik egymást és áthaladnak egymáson…



Hogyan lehet egy ilyen bonyolult mozgásegyenletet megoldani?

Numerikusan!

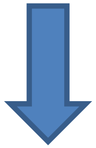
Legegyszerűbb, léptető algoritmus:

$$\mathbf{X}(t+\Delta t) = \mathbf{X}(t) + \dot{\mathbf{X}}(t)\Delta t$$

$$\dot{\mathbf{X}}(t+\Delta t) = \dot{\mathbf{X}}(t) + \ddot{\mathbf{X}}(t)\Delta t$$

Mit kapunk eredményül?

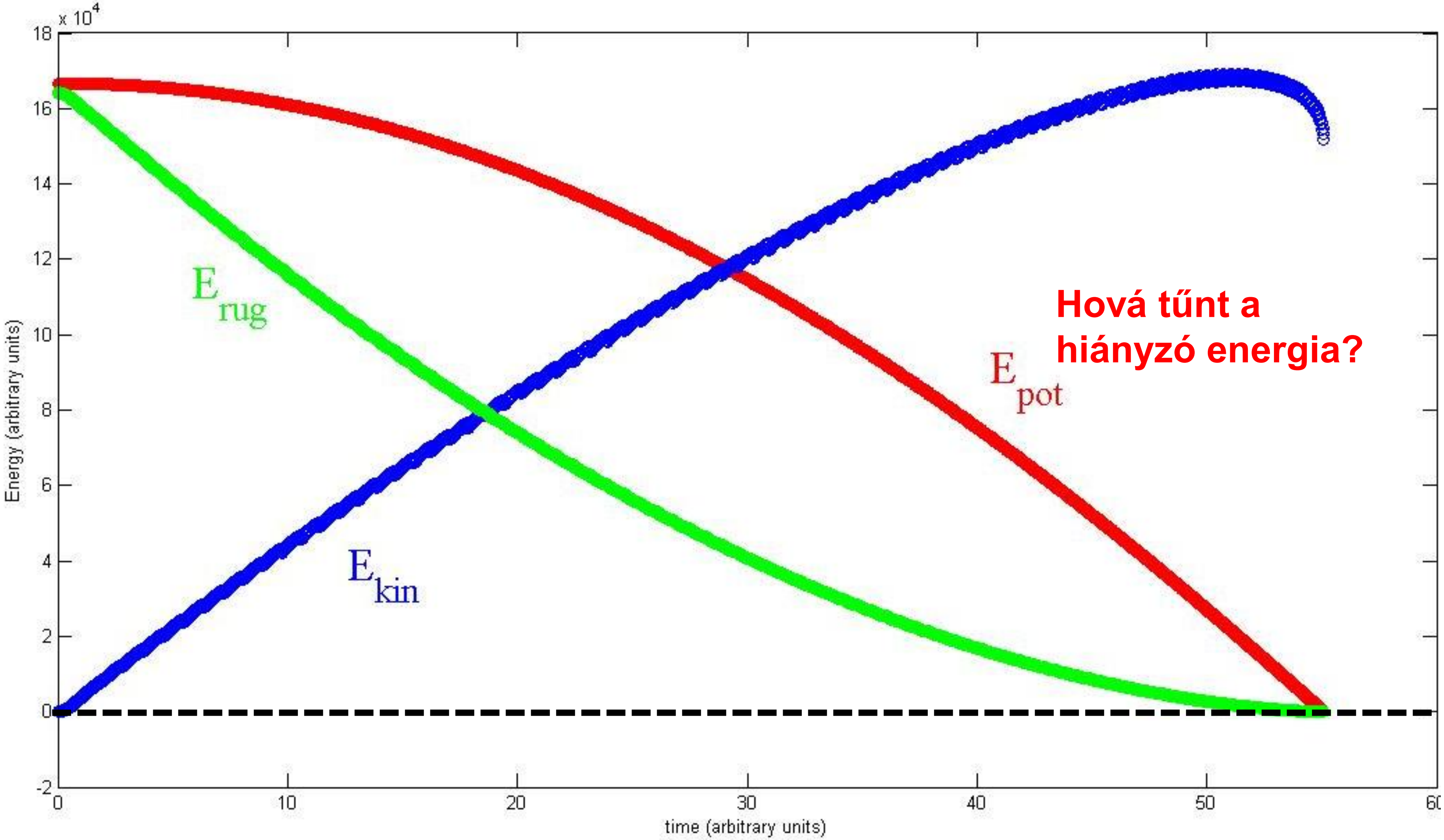
A menetek utolérik egymást és áthaladnak egymáson…



Vegyük bele a számolásba a menetek rugalmatlan ütközését is!


SUCCESS

Energetikai viszonyok az összecsukódás közben



Hová tűnt a hiányzó energia?

Energetikai viszonyok az összecsukódás közben

Tapasztalat (szimulációból): az összecsukódó slinky-nél a kezdeti energia felé alakul át csak mozgási energiává.

Energetikai viszonyok az összecsukódás közben

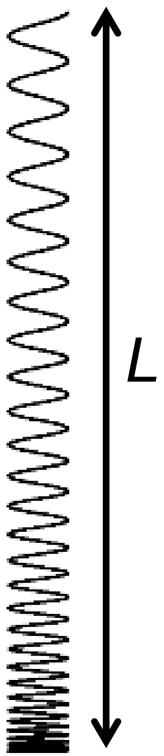
Tapasztalat (szimulációból): az összecsukódó slinky-nél a kezdeti energia fele alakul át csak mozgási energiává.

A többi a menetek rugalmatlan ütközései során hővé alakul.
Próbáljuk meg megérteni részletesebben!

Energetikai viszonyok az összecsukódás közben

Tapasztalat (szimulációból): az összecsukódó slinky-nél a kezdeti energia fele alakul át csak mozgási energiává.

A többi a menetek rugalmatlan ütközései során hővé alakul.
Próbáljuk meg megérteni részletesebben!



Osszuk fel ismét a rugót *N* egyenlő tömegű részre!

A *k*-adik darabka megnyúlása (azaz a hossza): $l_k = \frac{F_k}{ND} = \frac{k \cdot mg}{N^2 D}$

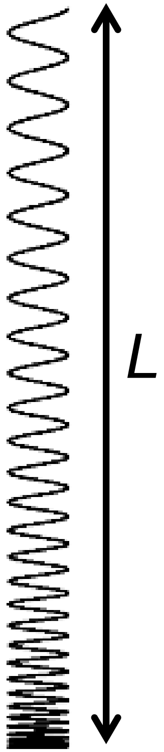
Az *n*-edik darabka magassága a legalsó ponthoz képest:

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} l_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k \cdot mg}{N^2 D} = \frac{mg}{N^2 D} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{mg}{N^2 D} \frac{n(n+1)}{2}$$

Energetikai viszonyok az összecsukódás közben

Az *n*-edik darabka magassága a legalsó ponthoz képest: $x_n = \frac{mg}{N^2 D}\frac{n(n+1)}{2}$

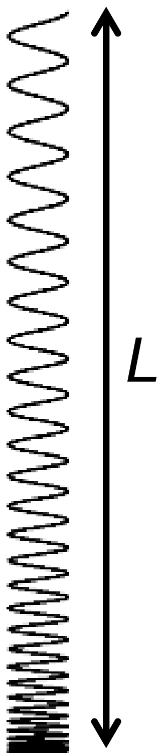
A tömegközéppont távolsága a legalsó ponttól:



Energetikai viszonyok az összecsukódás közben

Az n-edik darabka magassága a legalsó ponthoz képest: $x_n = \frac{mg}{N^2 D}\frac{n(n+1)}{2}$

A tömegközéppont távolsága a legalsó ponttól:



$$H_{TKP} = \frac{\sum_{n=1}^{N} \frac{m}{N} x_n}{m} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n = \frac{mg}{2N^3 D}\sum_{n=1}^{N} n(n+1)$$

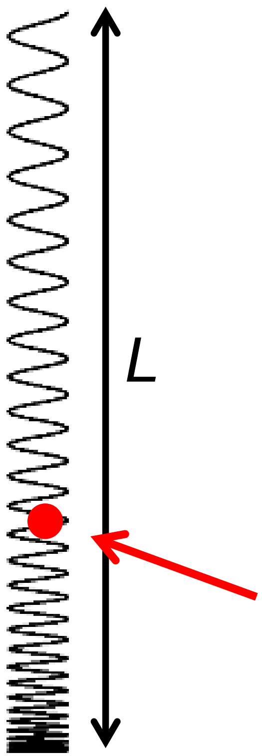
$$H_{TKP} = \frac{mg}{2N^3 D}\cdot\frac{1}{3}N(N+1)(N+2) \approx \frac{mg}{6D}$$

Emlékeztető: a slinky L hossza: $L = \frac{mg}{2D}$

Energetikai viszonyok az összecsukódás közben

Az n-edik darabka magassága a legalsó ponthoz képest: $$x_n = \frac{mg}{N^2 D}\frac{n(n+1)}{2}$$

A tömegközéppont távolsága a legalsó ponttól:



$$H_{TKP} = \frac{\sum_{n=1}^{N} \frac{m}{N} x_n}{m} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n = \frac{mg}{2N^3 D}\sum_{n=1}^{N} n(n+1)$$

$$H_{TKP} = \frac{mg}{2N^3 D}\cdot\frac{1}{3} N(N+1)(N+2) \approx \frac{mg}{6D}$$

Emlékeztető: a slinky L hossza: $$L = \frac{mg}{2D}$$

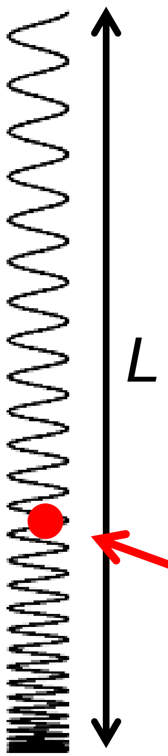
Tehát a tömegközéppont $H_{TKP}=L/3$ magasságban van!

Energetikai viszonyok az összecsukódás közben

Az n-edik darabka magassága a legalsó ponthoz képest: $$x_n = \frac{mg}{N^2 D}\frac{n(n+1)}{2}$$

A tömegközéppont távolsága a legalsó ponttól:

$$H_{TKP} = \frac{\sum_{n=1}^{N} \frac{m}{N} x_n}{m} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n = \frac{mg}{2N^3 D}\sum_{n=1}^{N} n(n+1)$$



$$H_{TKP} = \frac{mg}{2N^3 D}\cdot\frac{1}{3}N(N+1)(N+2) \approx \frac{mg}{6D}$$

Emlékeztető: a slinky L hossza: $$L = \frac{mg}{2D}$$

Tehát a tömegközéppont $H_{TKP}=L/3$ magasságban van!

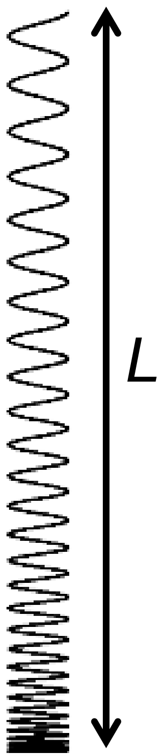
Energetikai viszonyok az összecsukódás közben

Tehát a **potenciális energia** a legalsó ponthoz képest: $E_{pot} = mg\frac{L}{3}$

A **rugalmas energia**? A következő:

$$E_{rug} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2} ND \cdot l_k^2 = \frac{1}{2} ND \sum_{k=1}^{N} l_k^2 = \frac{1}{2} ND \frac{(mg)^2}{N^4 D^2} \sum_{k=1}^{N} k^2$$

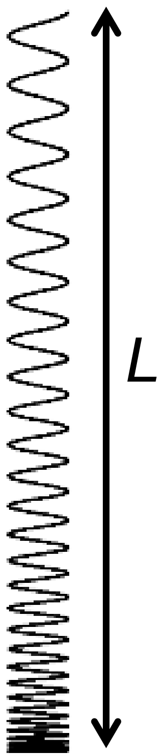
$$E_{rug} = \frac{1}{2} \frac{(mg)^2}{N^3 D} \frac{1}{6} N(N+1)(2N+1) \approx \frac{(mg)^2}{6D}$$



Energetikai viszonyok az összecsukódás közben

Tehát a **potenciális energia** a legalsó ponthoz képest: $$E_{pot} = mg\frac{L}{3}$$

A **rugalmas energia**? A következő:



$$E_{rug} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2} ND \cdot l_k^2 = \frac{1}{2} ND \sum_{k=1}^{N} l_k^2 = \frac{1}{2} ND \frac{(mg)^2}{N^4 D^2} \sum_{k=1}^{N} k^2$$

$$E_{rug} = \frac{1}{2} \frac{(mg)^2}{N^3 D} \frac{1}{6} N(N+1)(2N+1) \approx \frac{(mg)^2}{6D}$$

Emlékeztető: a slinky *L* hossza: $$L = \frac{mg}{2D}$$

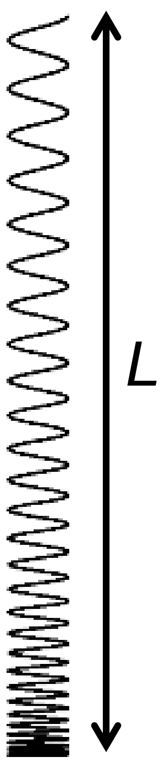
$$E_{rug} = \frac{(mg)^2}{6D} = mg\frac{L}{3}$$

Ugyanakkora!

Energetikai viszonyok az összecsukódás közben

$$E_{pot} = mg\frac{L}{3} \qquad\qquad E_{rug} = mg\frac{L}{3}$$

Mennyi a **mozgási energia** a teljes összecsukódás pillanatában?
A TKP szabadon esik *L*/3 magasságról!

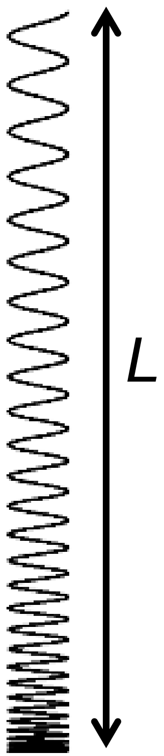


$$v = \sqrt{\frac{2}{3}gL} \quad \to \quad E_{kin} = mg\frac{L}{3}$$

Energetikai viszonyok az összecsukódás közben

$$E_{pot} = mg\frac{L}{3} \qquad E_{rug} = mg\frac{L}{3}$$

Mennyi a **mozgási energia** a teljes összecsukódás pillanatában?
A TKP szabadon esik *L*/3 magasságról!



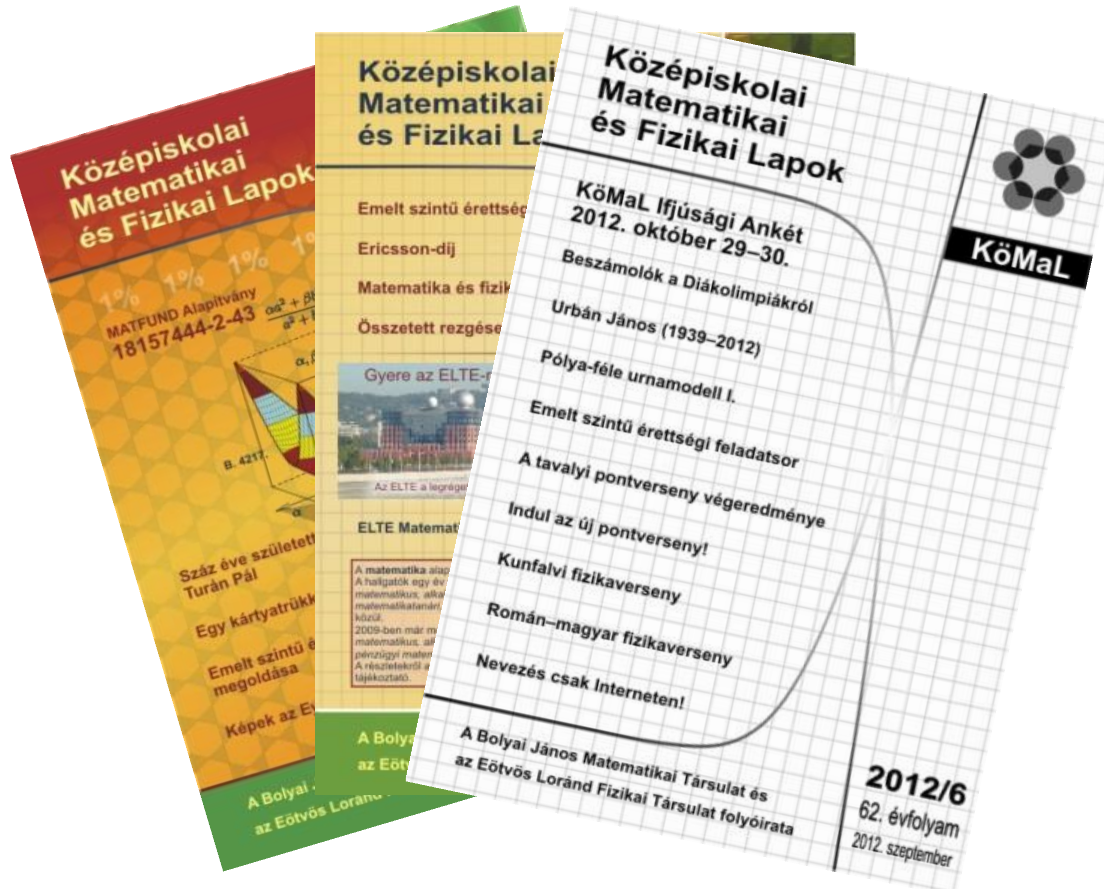
$$v = \sqrt{\frac{2}{3}gL} \quad \to \quad E_{kin} = mg\frac{L}{3}$$

Tehát a menetek ütközésekor keletkező hő (energiamegmaradás):

$$Q = E_{pot} + E_{rug} - E_{kin} = mg\frac{L}{3}$$

Érdeklődőknek ajánlom:

- **KöMaL**
- budapesti diákolimpiai szakkör
- hazai versenyek



Köszönöm a figyelmet!