Határozatlan mozgások

amikor a newtoni mechanika nem ad jóslatot

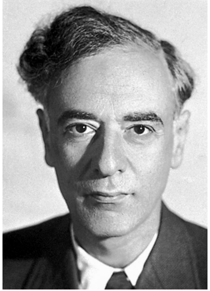
Németh Róbert
ELTE TTK, Komplex
Rendszerek Fizikája Tanszék

Az atomoktól a csillagokig
2023. október 26.

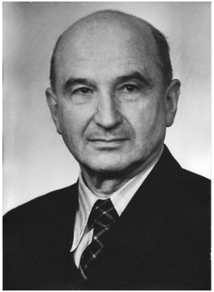
Bevezetés

„A koordináták és sebességek egyidejű megadása, mint a tapasztalat mutatja, teljesen jellemzi a rendszer állapotát, és elvben lehetővé teszi, hogy előre megmondjuk későbbi mozgását.”

L. D. Landau, E. M. Lifsic: Elméleti fizika I.
(Matolcsi Tamás fordítása)



Lev Davidovics Landau
(1908–1968)



Jevgenyij Mihajlovics Lifsic
(1915–1985)

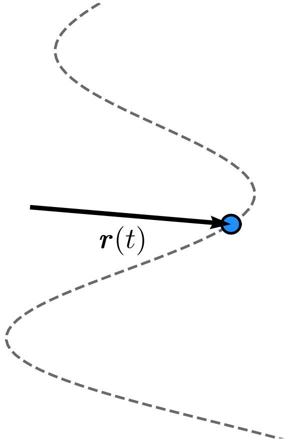
Bevezetés

„A koordináták és sebességek egyidejű megadása, mint a tapasztalat mutatja, teljesen jellemzi a rendszer állapotát, és elvben lehetővé teszi, hogy előre megmondjuk későbbi mozgását.”

L. D. Landau, E. M. Lifsic: Elméleti fizika I.
(Matolcsi Tamás fordítása)

Lifsic (balra) és Landau (jobbra) 1960-ban

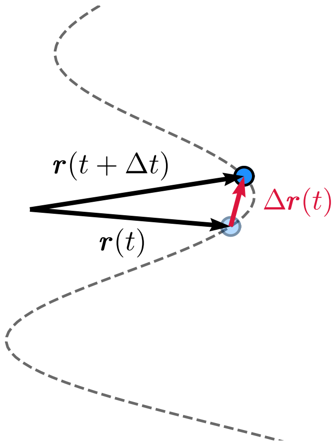
Pálya: a tömegpont helyét jellemző $\boldsymbol{r}$ helyvektor mint a t idő függvénye



Pálya: a tömegpont helyét jellemző $\boldsymbol{r}$ helyvektor mint a t idő függvénye

Sebesség: pálya kis időegységre eső megváltozása:

$$\boldsymbol{v}(t) = \dot{\boldsymbol{r}}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} \cong \frac{\Delta \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}$$



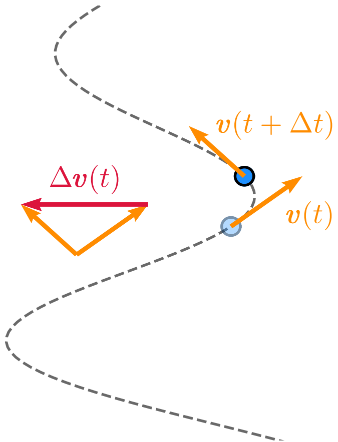
Pálya: a tömegpont helyét jellemző $\boldsymbol{r}$ helyvektor mint a t idő függvénye

Sebesség: pálya kis időegységre eső megváltozása:

$$\boldsymbol{v}(t) = \dot{\boldsymbol{r}}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} \cong \frac{\Delta \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}$$

Gyorsulás: sebesség kis időegységre eső megváltozása:

$$\boldsymbol{a}(t) = \ddot{\boldsymbol{r}}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t} \cong \frac{\Delta \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}$$



Példa: egyenletesen gyorsuló mozgás egy dimenzióban

Példa: egyenletesen gyorsuló mozgás egy dimenzióban

A pálya a négyzetes úttörvény szerint:

$$r(t) = \frac{a}{2}t^2$$

Példa: egyenletesen gyorsuló mozgás egy dimenzióban

A pálya a négyzetes úttörvény szerint:

$$r(t) = \frac{a}{2}t^2$$

A sebesség kiszámítása:

$$v(t) = \dot{r}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{a}{2\Delta t}\left[(t+\Delta t)^2 - t^2\right] =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{a}{2\Delta t}\left[t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2 - t^2\right] = \lim_{\Delta t \to 0}\left[at + \frac{a\Delta t}{2}\right] = at$$

Példa: egyenletesen gyorsuló mozgás egy dimenzióban

A pálya a négyzetes úttörvény szerint:

$$r(t) = \frac{a}{2}t^2$$

A sebesség kiszámítása:

$$v(t) = \dot{r}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{a}{2\Delta t}\left[(t+\Delta t)^2 - t^2\right] =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{a}{2\Delta t}\left[t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2 - t^2\right] = \lim_{\Delta t \to 0}\left[at + \frac{a\Delta t}{2}\right] = at$$

A gyorsulás kiszámítása:

$$a(t) = \ddot{r}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{a}{\Delta t}\left[t + \Delta t - t\right] = \lim_{\Delta t \to 0} a = a$$

Példa: egyenletesen gyorsuló mozgás egy dimenzióban

A pálya a négyzetes úttörvény szerint:

$$r(t) = \frac{a}{2}t^2$$

A sebesség kiszámítása:

$$v(t) = \dot{r}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{a}{2\Delta t}\left[(t+\Delta t)^2 - t^2\right] =$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{a}{2\Delta t}\left[t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2 - t^2\right] = \lim_{\Delta t \to 0}\left[at + \frac{a\Delta t}{2}\right] = at$$

A gyorsulás kiszámítása:

$$a(t) = \ddot{r}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{a}{\Delta t}\left[t + \Delta t - t\right] = \lim_{\Delta t \to 0} a = a$$

Az eredmény várakozásainkkal összhangban:

$$v(t) = \dot{r}(t) = at, \qquad a(t) = \ddot{r}(t) = a$$

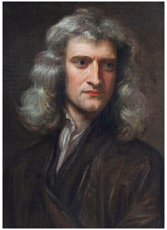
Bevezetés

Dinamikai alapok

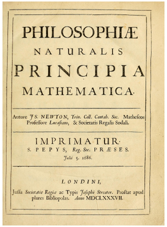
Newton I. törvénye

„Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.”

Minden test megtartja egyenes vonalú egyenletes mozgását vagy nyugalmi állapotát, amíg egy erő annak megváltoztatására nem kényszeríti.



Isaac Newton (1643–1727)


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore *JS. NEWTON*, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheseos Professore *Lucasiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,

Jussu *Societatis Regiæ* ac Typis *Josephi Streater*. Prostat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

Bevezetés

Dinamikai alapok

Newton I. törvénye

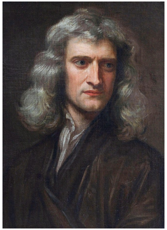
„Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.”

Minden test megtartja egyenes vonalú egyenletes mozgását vagy nyugalmi állapotát, amíg egy erő annak megváltoztatására nem kényszeríti.

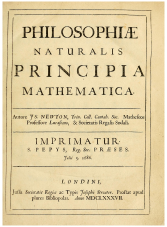
Newton II. törvénye

„Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.”

A mozgás megváltozása mindig arányos a kifejtett mozgatóerővel, és az erő egyenesének irányába történik.



Isaac Newton (1643–1727)



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore *JS. NEWTON*, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheseos Professore *Lucasiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu *Societatis Regiæ* ac Typis *Josephi Streater*. Prostat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

Newton I. törvénye

„Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare."

Minden test megtartja egyenes vonalú egyenletes mozgását vagy nyugalmi állapotát, amíg egy erő annak megváltoztatására nem kényszeríti.

Newton II. törvénye

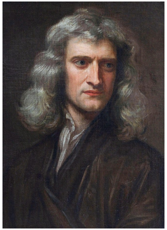
„Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur."

A mozgás megváltozása mindig arányos a kifejtett mozgatóerővel, és az erő egyenesének irányába történik.

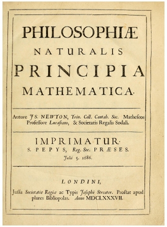
Newton III. törvénye

„Actioni contrariam semper et æqualem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales et in partes contrarias dirigi."

Minden hatáshoz tartozik egy egyenlő ellenhatás, azaz két test egymásra gyakorolt hatása mindig egyenlő és ellentétes irányú.



Isaac Newton (1643–1727)


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.
Autore J S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.
IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.
LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

Bevezetés
Dinamikai alapok

A matematikai leírásban, egyetlen testet vizsgálva:

- a test „mozgásának megváltozása” az $\boldsymbol{a}$ gyorsulás
- a testre kifejtett **erő** pedig egy $\boldsymbol{F}$ vektormennyiség
- az erő függhet a test $\boldsymbol{r}$ helyétől és $\boldsymbol{v}$ sebességétől
- a második törvényben kiszabott arányosság tényezője az m **tömeg**

A matematikai leírásban, egyetlen testet vizsgálva:

- a test „mozgásának megváltozása” az $\boldsymbol{a}$ gyorsulás
- a testre kifejtett **erő** pedig egy $\boldsymbol{F}$ vektormennyiség
- az erő függhet a test $\boldsymbol{r}$ helyétől és $\boldsymbol{v}$ sebességétől
- a második törvényben kiszabott arányosság tényezője az m **tömeg**

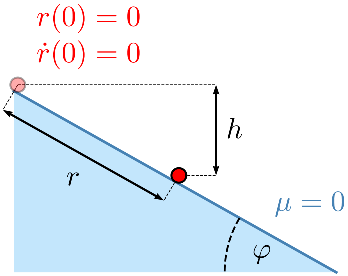
A fentieket összefoglalva:

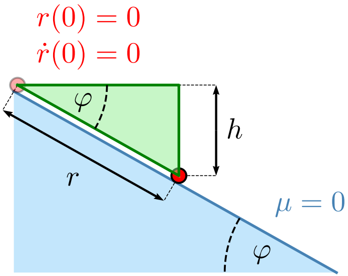
$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$$

Ez a jól ismert **mozgásegyenlet**, amely alternatív alakban:

$$\boxed{m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}})}$$

Példa: rögzített, merev, súrlódásmentes lejtőn elengedett pontszerű, m tömegű test

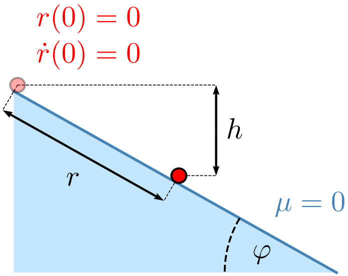




Példa: rögzített, merev, súrlódásmentes lejtőn elengedett pontszerű, m tömegű test

A φ hajlásszögű lejtő egyenlete:

$$h(r) = \sin\varphi \cdot r$$



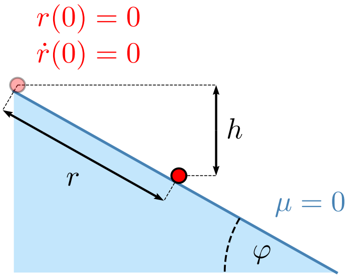
Példa: rögzített, merev, súrlódásmentes lejtőn elengedett pontszerű, m tömegű test

A φ hajlásszögű lejtő egyenlete:

$$h(r) = \sin\varphi \cdot r$$

Nehézségi erő lejtőirányú komponense:

$$F(r) = mg\sin\varphi = mgh(r)/r$$



Példa: rögzített, merev, súrlódásmentes lejtőn elengedett pontszerű, m tömegű test

A φ hajlásszögű lejtő egyenlete:

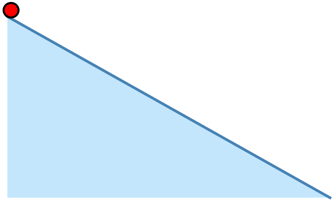
$$h(r) = \sin\varphi \cdot r$$

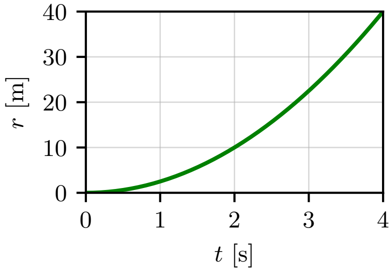
Nehézségi erő lejtőirányú komponense:

$$F(r) = mg\sin\varphi = mgh(r)/r$$

Mozgásegyenlet (tömeggel egyszerűsítve):

$$a = \ddot{r} = g\sin\varphi$$





Példa: rögzített, merev, súrlódásmentes lejtőn elengedett pontszerű, m tömegű test

A φ hajlásszögű lejtő egyenlete:

$$h(r) = \sin\varphi \cdot r$$

Nehézségi erő lejtőirányú komponense:

$$F(r) = mg\sin\varphi = mgh(r)/r$$

Mozgásegyenlet (tömeggel egyszerűsítve):

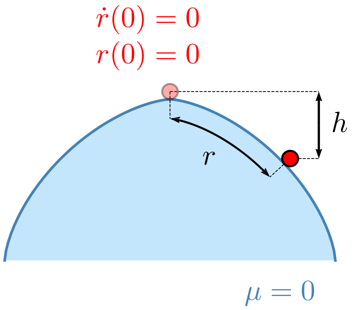
$$a = \ddot{r} = g\sin\varphi$$

Pálya alakja:

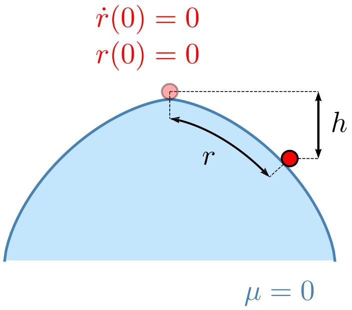
$$r(t) = \frac{g\sin\varphi}{2}t^2$$

A Norton-kupola

A probléma ismertetése



Példa: rögzített, merev, súrlódásmentes kupola csúcsán elengedett pontszerű, m tömegű test



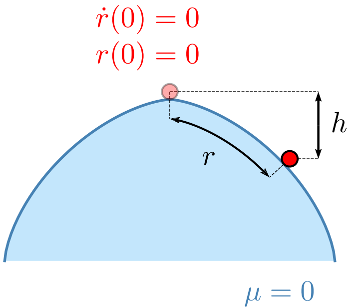
Példa: rögzített, merev, súrlódásmentes kupola csúcsán elengedett pontszerű, m tömegű test

A **Norton-kupola** egyenlete:

$$h(r) = \frac{2c}{3} r^{3/2}$$

A Norton-kupola

A probléma ismertetése



Példa: rögzített, merev, súrlódásmentes kupola csúcsán elengedett pontszerű, m tömegű test

A **Norton-kupola** egyenlete:

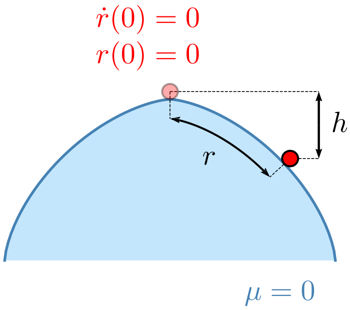
$$h(r) = \frac{2c}{3} r^{3/2}$$

Nehézségi erő lejtőirányú komponense:

$$F(r) = mg \sin\varphi(r) = mg \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta h(r)}{\Delta r}$$

A Norton-kupola

A probléma ismertetése



Példa: rögzített, merev, súrlódásmentes kupola csúcsán elengedett pontszerű, m tömegű test

A **Norton-kupola** egyenlete:

$$h(r) = \frac{2c}{3} r^{3/2}$$

Nehézségi erő lejtőirányú komponense:

$$F(r) = mg \sin \varphi(r) = mg \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta h(r)}{\Delta r}$$

Mozgásegyenlet (tömeggel egyszerűsítve):

$$\boxed{\ddot{r} = cg\sqrt{r}}$$

Triviális megoldás: a test mozdulatlan marad a csúcspontban:

$$r(t) = 0$$

Triviális megoldás: a test mozdulatlan marad a csúcspontban:

$$r(t) = 0$$

Ötlet: vizsgáljuk meg az alábbi pályát:

$$r(t) = \frac{c^2 g^2}{144} t^4$$

Triviális megoldás: a test mozdulatlan marad a csúcspontban:

$$r(t) = 0$$

Ötlet: vizsgáljuk meg az alábbi pályát:

$$r(t) = \frac{c^2 g^2}{144} t^4$$

A sebesség kiszámítása:

$$\begin{aligned}\dot{r}(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{c^2 g^2}{144 \Delta t} \left[(t+\Delta t)^4 - t^4 \right] = \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{c^2 g^2}{144 \Delta t} \left[t^4 + 4t^3 \Delta t + 6t^2 \Delta t^2 + 4t \Delta t^3 + \Delta t^4 - t^4 \right] = \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{c^2 g^2}{144} \left[4t^3 + 6t^2 \Delta t + 4t \Delta t^2 + \Delta t^3 \right] = \frac{c^2 g^2}{36} t^3\end{aligned}$$

Ötlet: vizsgáljuk az alábbi pályát és sebességet:

$$r(t) = \frac{c^2 g^2}{144} t^4, \quad \dot{r}(t) = \frac{c^2 g^2}{36} t^3$$

Ötlet: vizsgáljuk az alábbi pályát és sebességet:

$$r(t) = \frac{c^2 g^2}{144} t^4, \quad \dot{r}(t) = \frac{c^2 g^2}{36} t^3$$

A gyorsulás kiszámítása:

$$\begin{aligned}\ddot{r}(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\dot{r}(t+\Delta t) - \dot{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{c^2 g^2}{36 \Delta t} \left[(t+\Delta t)^3 - t^3 \right] = \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{c^2 g^2}{36 \Delta t} \left[t^3 + 3t^2 \Delta t + 3t \Delta t^2 + \Delta t^3 - t^3 \right] = \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{c^2 g^2}{36} \left[3t^2 + 3t\Delta t + \Delta t^2 \right] = \frac{c^2 g^2}{12} t^2\end{aligned}$$

Ötlet: vizsgáljuk az alábbi pályát és sebességet:

$$r(t) = \frac{c^2 g^2}{144} t^4, \quad \dot{r}(t) = \frac{c^2 g^2}{36} t^3$$

A gyorsulás kiszámítása:

$$\begin{aligned}
\ddot{r}(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\dot{r}(t+\Delta t) - \dot{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{c^2 g^2}{36 \Delta t} \left[(t+\Delta t)^3 - t^3 \right] = \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{c^2 g^2}{36 \Delta t} \left[t^3 + 3t^2 \Delta t + 3t \Delta t^2 + \Delta t^3 - t^3 \right] = \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{c^2 g^2}{36} \left[3t^2 + 3t\Delta t + \Delta t^2 \right] = \frac{c^2 g^2}{12} t^2
\end{aligned}$$

A mozgásegyenletbe behelyettesítve:

$$\ddot{r}(t) = \frac{c^2 g^2}{12} t^2 = cg \sqrt{\frac{c^2 g^2}{144} t^4} = cg \sqrt{r(t)}$$

Ötlet: vizsgáljuk az alábbi pályát és sebességet:

$$r(t) = \frac{c^2 g^2}{144} t^4, \quad \dot{r}(t) = \frac{c^2 g^2}{36} t^3$$

A gyorsulás kiszámítása:

$$\begin{aligned}
\ddot{r}(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\dot{r}(t+\Delta t) - \dot{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{c^2 g^2}{36 \Delta t} \left[(t+\Delta t)^3 - t^3 \right] = \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{c^2 g^2}{36 \Delta t} \left[t^3 + 3t^2 \Delta t + 3t \Delta t^2 + \Delta t^3 - t^3 \right] = \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{c^2 g^2}{36} \left[3t^2 + 3t \Delta t + \Delta t^2 \right] = \frac{c^2 g^2}{12} t^2
\end{aligned}$$

A mozgásegyenletbe behelyettesítve:

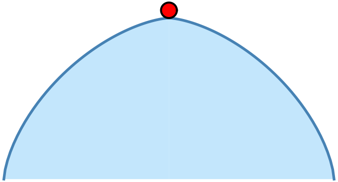
$$\ddot{r}(t) = \frac{c^2 g^2}{12} t^2 = cg \sqrt{\frac{c^2 g^2}{144} t^4} = cg \sqrt{r(t)}$$

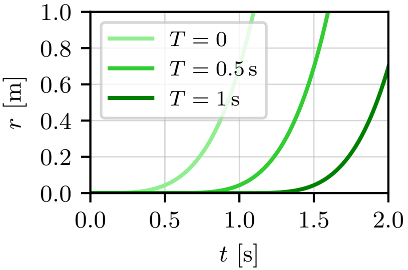
Ez szintén megoldás! Vajon lehetnek továbbiak is?

A Norton-kupola
Diszkusszió

Végtelen sok megoldás: a test egy tetszőleges T időpontban spontán elindul valamelyik irányba:

$$r(t) = \frac{c^2 g^2}{144} \begin{cases} 0 & t < T \\ (t-T)^4 & t \geq T \end{cases}$$

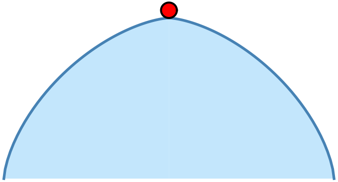




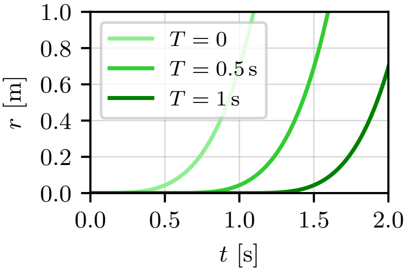
A Norton-kupola
Diszkusszió

Végtelen sok megoldás: a test egy tetszőleges T időpontban spontán elindul valamelyik irányba:

$$\boxed{r(t) = \frac{c^2 g^2}{144} \begin{cases} 0 & t < T \\ (t-T)^4 & t \geq T \end{cases}}$$



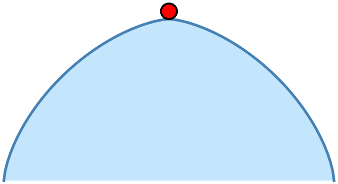
Időtükrözési szimmetria: a testet a kupola aljáról indítva véges idő alatt a csúcspontba ér



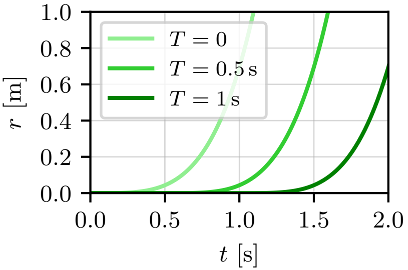
A Norton-kupola
Diszkusszió

Végtelen sok megoldás: a test egy tetszőleges T időpontban spontán elindul valamelyik irányba:

$$\boxed{r(t) = \frac{c^2 g^2}{144} \begin{cases} 0 & t < T \\ (t-T)^4 & t \geq T \end{cases}}$$



Időtükrözési szimmetria: a testet a kupola aljáról indítva véges idő alatt a csúcspontba ér



Problémák, sérülő alapelvek:

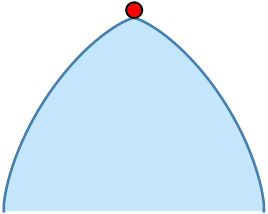
- **determinizmus** (meghatározottság)
- **kauzalitás** (okság)
- **inerciaelv** (Newton I. törvénye)

Általánosítás: módosított kupola alakja

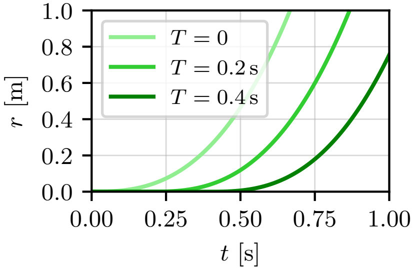
$$h(r) = \frac{cr^\alpha}{\alpha}, \quad \text{ahol} \quad 1 < \alpha < 2$$

Ekkor a megoldás:

$$r(t) = \left[\frac{cg(2-\alpha)^2}{2\alpha}\right]^{1/(2-\alpha)} \cdot \begin{cases} 0 & t < T \\ (t-T)^{2/(2-\alpha)} & t \geq T \end{cases}$$



$\alpha = 1.2$

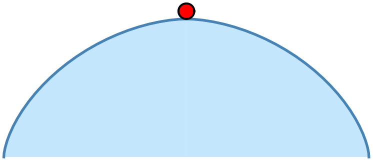


Általánosítás: módosított kupola alakja

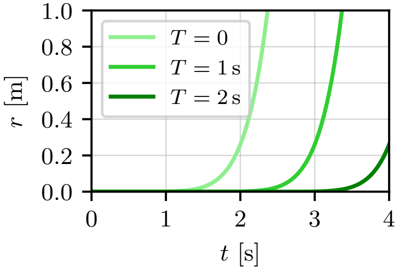
$$h(r) = \frac{cr^\alpha}{\alpha}, \quad \text{ahol} \quad 1 < \alpha < 2$$

Ekkor a megoldás:

$$r(t) = \left[\frac{cg(2-\alpha)^2}{2\alpha}\right]^{1/(2-\alpha)} \cdot \begin{cases} 0 & t < T \\ (t-T)^{2/(2-\alpha)} & t \geq T \end{cases}$$



$\alpha = 1.8$

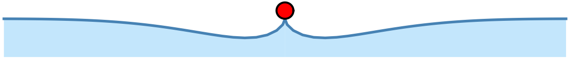


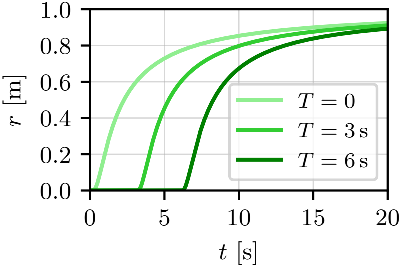
Általánosítás: módosított kupola alakja

$$h(r) = \frac{c^2 r^2}{2} \log^4\left(\frac{d}{r}\right)$$

Ekkor a megoldás:

$$r(t) = d \cdot \begin{cases} 0 & t < T \\ \exp\left[-1/c(t-T)\right] & t \geq T \end{cases}$$





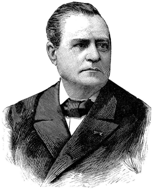
Siméon D. Poisson
(1781–1840)

Jean-Marie Duhamel
(1797–1872)

Korai eredmények:

- Poisson, 1806: szinguláris mozgásegyenletek

$$F(r) = cr^{\alpha-1}, \qquad F(v) = -c\sqrt{v}$$



Joseph Boussinesq
(1842–1929)

Joseph Bertrand
(1822–1900)

Siméon D. Poisson
(1781–1840)

Jean-Marie Duhamel
(1797–1872)

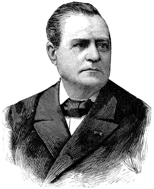
Korai eredmények:

- Poisson, 1806: szinguláris mozgásegyenletek

$$F(r) = cr^{\alpha-1}, \qquad F(v) = -c\sqrt{v}$$

- Duhamel, 1845: általánosítás

$$F(v) = -cv^{\alpha-1}$$



Joseph Boussinesq
(1842–1929)

Joseph Bertrand
(1822–1900)

A Norton-kupola
Történelmi áttekintés

Siméon D. Poisson
(1781–1840)

Jean-Marie Duhamel
(1797–1872)

Korai eredmények:

- Poisson, 1806: szinguláris mozgásegyenletek

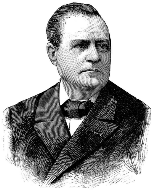
$$F(r) = cr^{\alpha-1}, \qquad F(v) = -c\sqrt{v}$$

- Duhamel, 1845: általánosítás

$$F(v) = -cv^{\alpha-1}$$

- Boussinesq, 1870-es évek: a kupola gondolata

$$h(r) = \frac{c^2 r^{\beta}}{2} \log^{\gamma}\left(\frac{d}{r}\right)$$



Joseph Boussinesq
(1842–1929)

Joseph Bertrand
(1822–1900)

A Norton-kupola
Történelmi áttekintés

Siméon D. Poisson
(1781–1840)

Jean-Marie Duhamel
(1797–1872)

Korai eredmények:

- Poisson, 1806: szinguláris mozgásegyenletek

$$F(r) = cr^{\alpha-1}, \qquad F(v) = -c\sqrt{v}$$

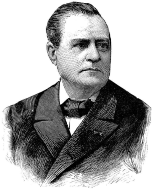
- Duhamel, 1845: általánosítás

$$F(v) = -cv^{\alpha-1}$$

- Boussinesq, 1870-es évek: a kupola gondolata

$$h(r) = \frac{c^2 r^\beta}{2} \log^\gamma \left(\frac{d}{r}\right)$$

- Bertrand, 1878: vita az indeterminizmusról



Joseph Boussinesq
(1842–1929)

Joseph Bertrand
(1822–1900)

Sanjay P. Bhat

Dennis S. Bernstein

Későbbi fejlemények:

- 20. század: kvantumelmélet előretör, klasszikus indeterminizmus problémája feledésbe merül

John D. Norton

Sanjay P. Bhat

Dennis S. Bernstein

Későbbi fejlemények:

- 20. század: kvantumelmélet előretör, klasszikus indeterminizmus problémája feledésbe merül
- Hutchison, 1993: Poisson sebességfüggő erőtörvényének felidézése, vizsgálata

John D. Norton

Sanjay P. Bhat

Dennis S. Bernstein

Későbbi fejlemények:

- 20. század: kvantumelmélet előretör, klasszikus indeterminizmus problémája feledésbe merül
- Hutchison, 1993: Poisson sebességfüggő erőtörvényének felidézése, vizsgálata
- Bhat és Bernstein, 1996: a kupola ötletének felidézése, vizsgálata, periodikus kupolák

$$h(r) = \frac{c}{\alpha} |\sin(r)|^{\alpha}$$

John D. Norton

Sanjay P. Bhat

Dennis S. Bernstein

Későbbi fejlemények:

- 20. század: kvantumelmélet előretör, klasszikus indeterminizmus problémája feledésbe merül
- Hutchison, 1993: Poisson sebességfüggő erőtörvényének felidézése, vizsgálata
- Bhat és Bernstein, 1996: a kupola ötletének felidézése, vizsgálata, periodikus kupolák

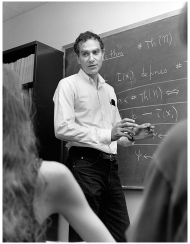
$$h(r) = \frac{c}{\alpha} |\sin(r)|^{\alpha}$$

- Norton, 2003: a kupola részletes tanulmányozása a kauzalitás szemszögéből, ezután a jelenség ismét nagyobb figyelmet kap

John D. Norton

A Norton-kupola

Történelmi áttekintés



David B. Malament

Későbbi fejlemények:

- Korolev, 2007; Malament, 2008; Wilson, 2009; Zinkernagel, 2010; Fletcher, 2011: Norton-kupola további analízise, filozófiai ellenérvek
- van Strien, 2014: történeti összefoglaló a klasszikus mechanika determinizmusáról

Henrik Zinkernagel

Mark Wilson

Samuel Craig Fletcher

Marij van Strien

Feloldás

A kísérleti fizika oldaláról

Kérdés: Kísérletileg megvalósítható a Norton-kupola?

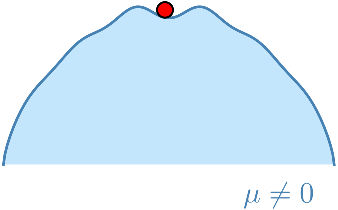
Feloldás

A kísérleti fizika oldaláról

Kérdés: Kísérletileg megvalósítható a Norton-kupola?

Az eredeti probléma idealizált, reális elrendezésben:

- a test és a lejtő között súrlódás lép fel
- a lejtő rugalmas objektum, deformálódhat
- a kezdőfeltétel nem állítható be pontosan
- egyéb környezeti hatások is lehetnek



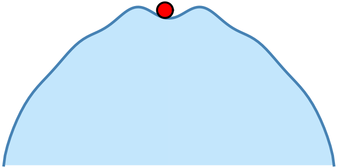
Feloldás

A kísérleti fizika oldaláról

Kérdés: Kísérletileg megvalósítható a Norton-kupola?

Az eredeti probléma idealizált, reális elrendezésben:

- a test és a lejtő között súrlódás lép fel
- a lejtő rugalmas objektum, deformálódhat
- a kezdőfeltétel nem állítható be pontosan
- egyéb környezeti hatások is lehetnek



$\mu \neq 0$

Kielégítő ez a magyarázat?

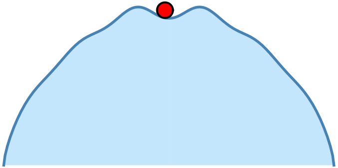
Feloldás

A kísérleti fizika oldaláról

Kérdés: Kísérletileg megvalósítható a Norton-kupola?

Az eredeti probléma idealizált, reális elrendezésben:

- a test és a lejtő között súrlódás lép fel
- a lejtő rugalmas objektum, deformálódhat
- a kezdőfeltétel nem állítható be pontosan
- egyéb környezeti hatások is lehetnek



$\mu \neq 0$

Kielégítő ez a magyarázat?

Ellenérvek:

- A felhasznált közelítések, idealizációk mind bevett gyakorlatok a newtoni mechanikán belül, itt miért ne alkalmazhatnánk őket?
- Ha csak a végeredmény alapján zárnánk ki a Norton-kupola esetét, úgy mi garantálja, hogy más elrendezésekben nem lép fel hasonló probléma?

Feloldás

Az elméleti fizika oldaláról

Kérdés: valóban sérti a Norton-kupola Newton I. törvényét?

Kérdés: valóban sérti a Norton-kupola Newton I. törvényét?

Newton I. törvénye

„*Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.*"

Minden test megtartja egyenes vonalú egyenletes mozgását vagy nyugalmi állapotát, amíg egy erő annak megváltoztatására nem kényszeríti.

Kérdés: valóban sérti a Norton-kupola Newton I. törvényét?

Newton I. törvénye

„Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare."

Minden test megtartja egyenes vonalú egyenletes mozgását vagy nyugalmi állapotát, amíg egy erő annak megváltoztatására nem kényszeríti.

Pillanatnyi értelmezés: ha nem hat erő, a test nem gyorsul
Ez teljesül, hiszen:

$$a(t=T) = \ddot{s}(t=T) = \frac{c^2 g^2}{12}(t-T)^2\Big|_{t=T} = 0$$

Kérdés: valóban sérti a Norton-kupola Newton I. törvényét?

Newton I. törvénye

„Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.”

Minden test megtartja egyenes vonalú egyenletes mozgását vagy nyugalmi állapotát, amíg egy erő annak megváltoztatására nem kényszeríti.

Pillanatnyi értelmezés: ha nem hat erő, a test nem gyorsul
Ez teljesül, hiszen:

$$a(t=T) = \ddot{s}(t=T) = \frac{c^2 g^2}{12}(t-T)^2\Big|_{t=T} = 0$$

Függetlenségi probléma: Ez az értelmezés nem speciális esete Newton II. törvényének?

Kérdés: valóban sérti a Norton-kupola Newton I. törvényét?

Newton I. törvénye

„Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.”

Minden test megtartja egyenes vonalú egyenletes mozgását vagy nyugalmi állapotát, amíg egy erő annak megváltoztatására nem kényszeríti.

Pillanatnyi értelmezés: ha nem hat erő, a test nem gyorsul
Ez teljesül, hiszen:

$$a(t=T) = \ddot{s}(t=T) = \frac{c^2 g^2}{12}(t-T)^2\Big|_{t=T} = 0$$

Függetlenségi probléma: Ez az értelmezés nem speciális esete Newton II. törvényének?

Trivialitási probléma: Miért éppen az erőmentes esetet tüntetjük ki?

Feloldás

Az elméleti fizika oldaláról

Newton I. törvénye

„Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare."

Minden test megtartja egyenes vonalú egyenletes mozgását vagy nyugalmi állapotát, amíg egy erő annak megváltoztatására nem kényszeríti.

Zinkernagel, 2010:

- **alternatív értelmezés:** ha t időpontban nem hat erő, akkor létezik egy kicsiny τ, hogy a $[t, t+\tau]$ intervallumban a test megtartja egyenes vonalú egyenletes mozgását

Feloldás

Az elméleti fizika oldaláról

Newton I. törvénye

„Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.”

Minden test megtartja egyenes vonalú egyenletes mozgását vagy nyugalmi állapotát, amíg egy erő annak megváltoztatására nem kényszeríti.

Zinkernagel, 2010:

- **alternatív értelmezés:** ha t időpontban nem hat erő, akkor létezik egy kicsiny τ, hogy a $[t, t+\tau]$ intervallumban a test megtartja egyenes vonalú egyenletes mozgását
- nem oldja fel a trivialitási problémát

Feloldás

Az elméleti fizika oldaláról

Newton I. törvénye

„Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.”

Minden test megtartja egyenes vonalú egyenletes mozgását vagy nyugalmi állapotát, amíg egy erő annak megváltoztatására nem kényszeríti.

Zinkernagel, 2010:

- **alternatív értelmezés:** ha t időpontban nem hat erő, akkor létezik egy kicsiny τ, hogy a $[t, t+\tau]$ intervallumban a test megtartja egyenes vonalú egyenletes mozgását
- nem oldja fel a trivialitási problémát

Hoek, 2021:

- eredeti angol fordítás (Motte, 1729) pontatlan, vissza kell térni a latin változathoz

Feloldás

Az elméleti fizika oldaláról

Newton I. törvénye

„Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare."

Minden test megtartja egyenes vonalú egyenletes mozgását vagy nyugalmi állapotát, kivéve amennyire egy erő annak megváltoztatására kényszeríti.

Zinkernagel, 2010:

- **alternatív értelmezés:** ha t időpontban nem hat erő, akkor létezik egy kicsiny τ, hogy a $[t, t+\tau]$ intervallumban a test megtartja egyenes vonalú egyenletes mozgását
- nem oldja fel a trivialitási problémát

Hoek, 2021:

- eredeti angol fordítás (Motte, 1729) pontatlan, vissza kell térni a latin változathoz

Newton I. törvénye

„Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare."

Minden test megtartja egyenes vonalú egyenletes mozgását vagy nyugalmi állapotát, kivéve amennyire egy erő annak megváltoztatására kényszeríti.

Zinkernagel, 2010:

- **alternatív értelmezés:** ha t időpontban nem hat erő, akkor létezik egy kicsiny τ, hogy a $[t, t+\tau]$ intervallumban a test megtartja egyenes vonalú egyenletes mozgását
- nem oldja fel a trivialitási problémát

Hoek, 2021:

- eredeti angol fordítás (Motte, 1729) pontatlan, vissza kell térni a latin változathoz
- **alternatív értelmezés:** az egyenes vonalú egyenletes mozgástól való eltérés csak erő hatására történhet

Feloldás

Az elméleti fizika oldaláról

Newton I. törvénye

„Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.”

Minden test megtartja egyenes vonalú egyenletes mozgását vagy nyugalmi állapotát, kivéve amennyire egy erő annak megváltoztatására kényszeríti.

Zinkernagel, 2010:

- **alternatív értelmezés:** ha t időpontban nem hat erő, akkor létezik egy kicsiny τ, hogy a $[t, t+\tau]$ intervallumban a test megtartja egyenes vonalú egyenletes mozgását
- nem oldja fel a trivialitási problémát

Hoek, 2021:

SZEPTEMBER 18., 11:01 INDEX • TECH-TUDOMÁNY

Félrefordítás volt a fizika három évszázados alaptörvénye

Benéztek egy szót Newton tehetetlenségi törvényében.

Feloldás

Az elméleti fizika oldaláról

Kérdés: mi okozza a determinizmus és a kauzalitás sérülését a Norton-kupola esetén?

Feloldás

Az elméleti fizika oldaláról

Kérdés: mi okozza a determinizmus és a kauzalitás sérülését a Norton-kupola esetén?

Ötlet: vizsgáljuk meg, közelíthető-e a kupola csúcspontja gömbbel, amely esetben a mozgás determinisztikus (rúdinga-analógia)

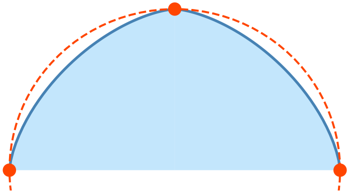
Feloldás

Az elméleti fizika oldaláról

Kérdés: mi okozza a determinizmus és a kauzalitás sérülését a Norton-kupola esetén?

Ötlet: vizsgáljuk meg, közelíthető-e a kupola csúcspontja gömbbel, amely esetben a mozgás determinisztikus (rúdinga-analógia)

Észrevétel: A kupola csúcspontján a görbületi sugár végtelenül kicsi!



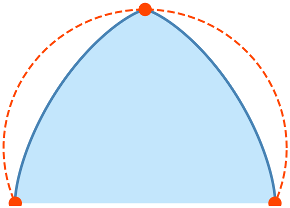
Feloldás

Az elméleti fizika oldaláról

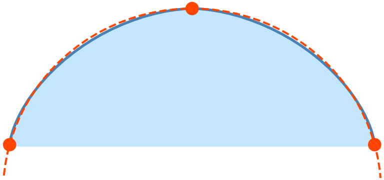
Kérdés: mi okozza a determinizmus és a kauzalitás sérülését a Norton-kupola esetén?

Ötlet: vizsgáljuk meg, közelíthető-e a kupola csúcspontja gömbbel, amely esetben a mozgás determinisztikus (rúdinga-analógia)

Észrevétel: A kupola csúcspontján a görbületi sugár végtelenül kicsi!



$\alpha = 1.2$



$\alpha = 1.8$

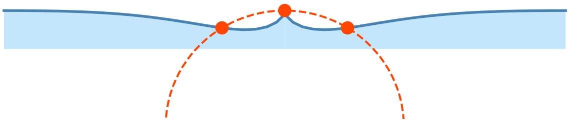
Feloldás

Az elméleti fizika oldaláról

Kérdés: mi okozza a determinizmus és a kauzalitás sérülését a Norton-kupola esetén?

Ötlet: vizsgáljuk meg, közelíthető-e a kupola csúcspontja gömbbel, amely esetben a mozgás determinisztikus (rúdinga-analógia)

Észrevétel: A kupola csúcspontján a görbületi sugár végtelenül kicsi!



Feloldás

Az elméleti fizika oldaláról

Állítás (Picard–Lindelöf-tétel speciális esete)

Ha a kupola görbületi sugara a csúcspontban véges, akkor a kezdetiértékfeladat megoldása, azaz a pálya egyértelmű.

Feloldás

Az elméleti fizika oldaláról

Állítás (Picard–Lindelöf-tétel speciális esete)

Ha a kupola görbületi sugara a csúcspontban véges, akkor a kezdetiértékfeladat megoldása, azaz a pálya egyértelmű.

Konklúzió: determinizmus és kauzalitás $\longleftrightarrow$ megszokott matematikai formalizmus

Feloldás

Az elméleti fizika oldaláról

Állítás (Picard–Lindelöf-tétel speciális esete)

Ha a kupola görbületi sugara a csúcspontban véges, akkor a kezdetiértékfeladat megoldása, azaz a pálya egyértelmű.

Konklúzió: determinizmus és kauzalitás $\longleftrightarrow$ megszokott matematikai formalizmus

Lehetséges feloldás: differenciaegyenletek (Zinkernagel, 2010)

Állítás (Picard–Lindelöf-tétel speciális esete)

Ha a kupola görbületi sugara a csúcspontban véges, akkor a kezdetiértékfeladat megoldása, azaz a pálya egyértelmű.

Konklúzió: determinizmus és kauzalitás $\longleftrightarrow$ megszokott matematikai formalizmus

Lehetséges feloldás: differenciaegyenletek (Zinkernagel, 2010)

- idő véges egységekben értelmezett: $t \in \tau\mathbb{Z}$

Állítás (Picard–Lindelöf-tétel speciális esete)

Ha a kupola görbületi sugara a csúcspontban véges, akkor a kezdetiértékfeladat megoldása, azaz a pálya egyértelmű.

Konklúzió: determinizmus és kauzalitás $\longleftrightarrow$ megszokott matematikai formalizmus

Lehetséges feloldás: differenciaegyenletek (Zinkernagel, 2010)

- idő véges egységekben értelmezett: $t \in \tau\mathbb{Z}$
- pálya, sebesség és gyorsulás diszkrét értelmezési tartományú

$$\boldsymbol{v}_t = \frac{\boldsymbol{r}_{t+\tau} - \boldsymbol{r}_t}{\tau}, \quad \boldsymbol{a}_t = \frac{\boldsymbol{v}_{t+\tau} - \boldsymbol{v}_t}{\tau}$$

Feloldás

Az elméleti fizika oldaláról

Állítás (Picard–Lindelöf-tétel speciális esete)

Ha a kupola görbületi sugara a csúcspontban véges, akkor a kezdetiértékfeladat megoldása, azaz a pálya egyértelmű.

Konklúzió: determinizmus és kauzalitás $\longleftrightarrow$ megszokott matematikai formalizmus

Lehetséges feloldás: differenciaegyenletek (Zinkernagel, 2010)

- idő véges egységekben értelmezett: $t \in \tau\mathbb{Z}$
- pálya, sebesség és gyorsulás diszkrét értelmezési tartományú

$$\boldsymbol{v}_t = \frac{\boldsymbol{r}_{t+\tau} - \boldsymbol{r}_t}{\tau}, \quad \boldsymbol{a}_t = \frac{\boldsymbol{v}_{t+\tau} - \boldsymbol{v}_t}{\tau}$$

- mozgásegyenlet differenciaegyenletként jelenik meg

$$m\boldsymbol{a}_t = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_t, \boldsymbol{v}_t)$$

Feloldás

Az elméleti fizika oldaláról

Példa: a kupolák esete

Feloldás

Az elméleti fizika oldaláról

Példa: a kupolák esete

A mozgásegyenlet, mint differenciaegyenlet:

$$m\left[r_{t+2\tau} - 2r_{t+\tau} + r_t\right] = \tau^2 F(r_t)$$

Feloldás

Az elméleti fizika oldaláról

Példa: a kupolák esete

A mozgásegyenlet, mint differenciaegyenlet:

$$m\left[r_{t+2\tau} - 2r_{t+\tau} + r_t\right] = \tau^2 F(r_t)$$

Rekurzióra vezet:

$$r_{t+2\tau} = 2r_{t+\tau} - r_t + \frac{\tau^2}{m}F(r_t)$$

Példa: a kupolák esete

A mozgásegyenlet, mint differenciaegyenlet:

$$m\left[r_{t+2\tau} - 2r_{t+\tau} + r_t\right] = \tau^2 F(r_t)$$

Rekurzióra vezet:

$$r_{t+2\tau} = 2r_{t+\tau} - r_t + \frac{\tau^2}{m} F(r_t)$$

Kezdőfeltételek:

$$r_0 = 0, \qquad v_0 = \frac{r_\tau - r_0}{\tau} = 0$$

Feloldás

Az elméleti fizika oldaláról

Példa: a kupolák esete

A mozgásegyenlet, mint differenciaegyenlet:

$$m\left[r_{t+2\tau} - 2r_{t+\tau} + r_t\right] = \tau^2 F(r_t)$$

Rekurzióra vezet:

$$r_{t+2\tau} = 2r_{t+\tau} - r_t + \frac{\tau^2}{m}F(r_t)$$

Kezdőfeltételek:

$$r_0 = 0, \qquad v_0 = \frac{r_\tau - r_0}{\tau} = 0$$

Ezek alapján: $r_\tau = r_0 = 0$

Példa: a kupolák esete

A mozgásegyenlet, mint differenciaegyenlet:

$$m\left[r_{t+2\tau} - 2r_{t+\tau} + r_t\right] = \tau^2 F(r_t)$$

Rekurzióra vezet:

$$r_{t+2\tau} = 2r_{t+\tau} - r_t + \frac{\tau^2}{m} F(r_t)$$

Kezdőfeltételek:

$$r_0 = 0, \qquad v_0 = \frac{r_\tau - r_0}{\tau} = 0$$

Ezek alapján: $r_\tau = r_0 = 0$

Tudjuk továbbá, hogy a kupolák tetején: $F(r_0) = 0$

Feloldás

Az elméleti fizika oldaláról

Példa: a kupolák esete

A mozgásegyenlet, mint differenciaegyenlet:

$$m\left[r_{t+2\tau} - 2r_{t+\tau} + r_t\right] = \tau^2 F(r_t)$$

Rekurzióra vezet:

$$r_{t+2\tau} = 2r_{t+\tau} - r_t + \frac{\tau^2}{m} F(r_t)$$

Kezdőfeltételek:

$$r_0 = 0, \qquad v_0 = \frac{r_\tau - r_0}{\tau} = 0$$

Ezek alapján: $r_\tau = r_0 = 0$

Tudjuk továbbá, hogy a kupolák tetején: $F(r_0) = 0$

Behelyettesítve adódik a rekurzió **egyértelmű** megoldása: $r_t = 0$ minden t esetén

Feloldás

A filozófia oldaláról

Fő kérdés: Determinisztikus és kauzális tehát a newtoni mechanika?

Feloldás
A filozófia oldaláról

Fő kérdés: Determinisztikus és kauzális tehát a newtoni mechanika?

Alkérdések:

- Miért ragaszkodunk annyira a determinizmus és kauzalitás fogalmaihoz?
- Létezik-e egyáltalán „a” newtoni mechanika?

Feloldás

A filozófia oldaláról

Fő kérdés: Determinisztikus és kauzális tehát a newtoni mechanika?

Alkérdések:

- Miért ragaszkodunk annyira a determinizmus és kauzalitás fogalmaihoz?
- Létezik-e egyáltalán „a” newtoni mechanika?

Lehetséges válaszok, gondolatok:

Feloldás
A filozófia oldaláról

Fő kérdés: Determinisztikus és kauzális tehát a newtoni mechanika?

Alkérdések:

- Miért ragaszkodunk annyira a determinizmus és kauzalitás fogalmaihoz?
- Létezik-e egyáltalán „a” newtoni mechanika?

Lehetséges válaszok, gondolatok:

- A determinizmus alapvető természeti törvény, amelyet minden fizikai elméletnek tükröznie kell. (Poisson)

Feloldás

A filozófia oldaláról

Fő kérdés: Determinisztikus és kauzális tehát a newtoni mechanika?

Alkérdések:

- Miért ragaszkodunk annyira a determinizmus és kauzalitás fogalmaihoz?
- Létezik-e egyáltalán „a” newtoni mechanika?

Lehetséges válaszok, gondolatok:

- A determinizmus alapvető természeti törvény, amelyet minden fizikai elméletnek tükröznie kell. (Poisson)
- A szinguláris megoldások a szabad akarat megnyilvánulásai lehetnek. (Boussinesq)

Feloldás

A filozófia oldaláról

Fő kérdés: Determinisztikus és kauzális tehát a newtoni mechanika?

Alkérdések:

- Miért ragaszkodunk annyira a determinizmus és kauzalitás fogalmaihoz?
- Létezik-e egyáltalán „a” newtoni mechanika?

Lehetséges válaszok, gondolatok:

- A determinizmus alapvető természeti törvény, amelyet minden fizikai elméletnek tükröznie kell. (Poisson)
- A szinguláris megoldások a szabad akarat megnyilvánulásai lehetnek. (Boussinesq)
- A kauzalitás nincs expliciten posztulálva a legtöbb fizikai elméletben, inkább az elmélet redukciójaként fogható fel. (Norton)

Feloldás

A filozófia oldaláról

Fő kérdés: Determinisztikus és kauzális tehát a newtoni mechanika?

Alkérdések:

- Miért ragaszkodunk annyira a determinizmus és kauzalitás fogalmaihoz?
- Létezik-e egyáltalán „a” newtoni mechanika?

Lehetséges válaszok, gondolatok:

- A determinizmus alapvető természeti törvény, amelyet minden fizikai elméletnek tükröznie kell. (Poisson)
- A szinguláris megoldások a szabad akarat megnyilvánulásai lehetnek. (Boussinesq)
- A kauzalitás nincs expliciten posztulálva a legtöbb fizikai elméletben, inkább az elmélet redukciójaként fogható fel. (Norton)
- Nincs egyértelmű meghatározása a newtoni mechanikának. (Malament, Wilson, Fletcher)

Feloldás

A filozófia oldaláról

Fő kérdés: Determinisztikus és kauzális tehát a newtoni mechanika?

Alkérdések:

- Miért ragaszkodunk annyira a determinizmus és kauzalitás fogalmaihoz?
- Létezik-e egyáltalán „a” newtoni mechanika?

Lehetséges válaszok, gondolatok:

- A determinizmus alapvető természeti törvény, amelyet minden fizikai elméletnek tükröznie kell. (Poisson)
- A szinguláris megoldások a szabad akarat megnyilvánulásai lehetnek. (Boussinesq)
- A kauzalitás nincs expliciten posztulálva a legtöbb fizikai elméletben, inkább az elmélet redukciójaként fogható fel. (Norton)
- Nincs egyértelmű meghatározása a newtoni mechanikának. (Malament, Wilson, Fletcher)
- A fizikai elméletek nem örökérvényű természeti törvények, hanem véges érvényességi körrel rendelkező modellek, amelyek célja a kísérleti predikció.

Kitekintés, összefoglalás

Érdeklődőknek:

- űrhódító problémák (Painlevé, 1895; Xia, 1988)
- ütközéses szuperfeladatok (Laraudogoitia, 1996)

Kitekintés, összefoglalás

Érdeklődőknek:

- űrhódító problémák (Painlevé, 1895; Xia, 1988)
- ütközéses szuperfeladatok (Laraudogoitia, 1996)

Mire jó mindez?

Kitekintés, összefoglalás

Érdeklődőknek:

- űrhódító problémák (Painlevé, 1895; Xia, 1988)
- ütközéses szuperfeladatok (Laraudogoitia, 1996)

Mire jó mindez?

Kérdések: robert.nemeth@ttk.elte.hu

Kitekintés, összefoglalás

Érdeklődőknek:

- űrhódító problémák (Painlevé, 1895; Xia, 1988)
- ütközéses szuperfeladatok (Laraudogoitia, 1996)

Mire jó mindez?

Kérdések: robert.nemeth@ttk.elte.hu

Köszönöm a figyelmet!