

# Változatos Véletlen Árazási Problémák

Bihary Zsolt

AtomCsill 2014

# Fizikus a befektetési bankban

- Remek társaság
- Releváns matematikai műveltség
- Számítástechnikai affinitás
- Intuitív gondolkodás
- Modellezési képesség

# Az árjegyzés problémája

Feldobunk egy pénzt. Ha fej, fizetek a kontraktus tulajdonosának 100\$-t. Ha írás, nem fizetek semmit.

Ennek a kontraktusnak a várható értéke nyilvánvalóan 50\$.

# Az árjegyzés problémája

Feldobunk egy pénzt. Ha fej, fizetek a kontraktus tulajdonosának 100\$-t. Ha írás, nem fizetek semmit.

Mennyiért adnám el ezt a kontraktust?

Mennyiért vennék meg tőlem ezt a kontraktust?

Mennyiért venném meg ezt a kontraktust?

Mennyiért adnák el nekem ezt a kontraktust?



# Az árjegyzés problémája

Feldobunk egy pénzt. Ha fej, fizetek a kontraktus tulajdonosának 100\$-t. Ha írás, nem fizetek semmit.

Mennyiért adnám el ezt a kontraktust???

Mennyiért venném meg ezt a kontraktust???

Az árjegyző vállalja hogy általa szabott áron hajlandó adni is és venni is a kontraktust.

# Az árjegyzés problémája

Feldobunk egy pénzt. Ha fej, fizetek a kontraktus tulajdonosának 100\$-t. Ha írás, nem fizetek semmit.

Mennyiért adnám el ezt a kontraktust???

55\$ - lesz aki megveszi, azon várhatóan nyerek 5\$-t.

Mennyiért venném meg ezt a kontraktust???

45\$ - lesz aki eladja, azon várhatóan nyerek 5\$-t.

# Az árjegyzés problémája

Feldobunk egy pénzt. Ha fej, fizetek a kontraktus tulajdonosának 100\$-t. Ha írás, nem fizetek semmit.

Mennyiért adnám el ezt a kontraktust???

65\$ - senki nem veszi meg, túl drága, zéró profit

Mennyiért venném meg ezt a kontraktust???

55\$ - sokan lesznek aki eladják, várhatóan vesztek 5\$-t.

# Az árjegyzés problémája

Feldobunk egy pénzt. Ha fej, fizetek a kontraktus tulajdonosának 100\$-t. Ha írás, nem fizetek semmit.

Mennyiért adnám el ezt a kontraktust???

45\$ - sokan lesznek akik megveszik, várhatóan vesztek 5\$-t

Mennyiért venném meg ezt a kontraktust???

35\$ - senki nem adja el, túl olcsó, zéró profit



# Játékszabály

Feladat	Tipp	Helyes	Abszolút különbség	Profit
1.	40	40	0	10
2.	32	49	17	-7
3.	27	25	2	8
4.	x			-5

$$\text{Profit} = 10 - \text{abs}(\text{Helyes} - \text{Tipp})$$

Ha nincs árazás (x) profit (büntetés) = -5

# 1. Feladat

Standard kockával dobunk. A kontraktus 100-at fizet ha prímet dobunk.

# 1. Feladat

Standard kockával dobunk. A kontraktus 100-at fizet ha prímet dobunk.

**Megoldás: 50**

Példa arra, hogy a megoldás a kontraktus által definiált kedvező esetek valószínűsége. (%-ban).

Kedvező esetek: 2,3,5

## 2. Feladat

Standard kockával dobunk. A kontraktus a 10-szeresét fizeti a dobott számnak.



## 2. Feladat

Standard kockával dobunk. A kontraktus a 10-szeresét fizeti a dobott számnak.

**Megoldás: 35**

Példa arra, hogy a megoldás a kontraktus által definiált kifizetések várható értéke.

1, 2, 3, 4, 5, 6 átlaga 3,5.

## 3. Feladat

Standard kockával dobunk addig, amíg nem sikerül prímet dobnunk.

A kontraktus 10-szeresét fizeti a végül dobott számnak.

### 3. Feladat

Standard kockával dobunk addig, amíg nem sikerül prímet dobnunk.

A kontraktus 10-szeresét fizeti a végül dobott számnak.

**Megoldás: 33**

Példa arra, hogy a megoldás a kontraktus által definiált kifizetések *feltételes várható értéke*.

2, 3, 5 átlaga 3,3.

## 4. Feladat

Standard kockával dobunk. Ha prímet dobtunk, a kontraktus a 10-szeresét fizeti a dobott számnak.  
Ha nem prímet dobtunk, a kontraktus nem fizet semmit.



## 4. Feladat

Standard kockával dobunk. Ha prímet dobtunk, a kontraktus a 10-szeresét fizeti a dobott számnak. Ha nem prímet dobtunk, a kontraktus nem fizet semmit.

**Megoldás: 17**

Újabb példa a kifizetések várható értékére.

- 2, 3, 5 átlaga 3,33, valószínűség  $\frac{1}{2}$
- 0, 2, 3, 0, 5, 0 átlaga 1,67

## 5. Feladat

Generálunk egy  $X = \{0,1\}$  egyenletes random számot.  
A kontraktus a generált szám 100-szorosát fizeti.

## 5. Feladat

Generálunk egy  $X = \{0,1\}$  egyenletes random számot.  
A kontraktus a generált szám 100-szorosát fizeti.

**Megoldás: 50**

Az  $X = \{0,1\}$  egyenletes valószínűségi változó várható értéke 0,5.

## 6. Feladat

Generálunk egy  $X = \{0,1\}$  egyenletes random számot.

A kontraktus a következő kifizetési függvény szerint fizet:

$$\text{Kifizetés} = 100 * X * X * X * X = 100 * X^4$$



## 6. Feladat

Generálunk egy  $X = \{0,1\}$  egyenletes random számot.  
A kontraktus a következő kifizetési függvény szerint fizet:  
Kifizetés =  $100 * X * X * X * X = 100 * X^4$

**Megoldás: 20**

Az  $X = \{0,1\}$  változót a hatványozás nagy mértékben csökkenti, így a várható érték is jóval kisebb lesz mint 0,5.  
Trükk: Reprezentáljuk a  $\{0,1\}$  randomot a mintával:  $\{0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9\}$ . Végezzük el a transzformációt, és átlagoljunk. Az eredmény = 0,193 és ez már egy igen jó közelítés...

## 7. Feladat

$X$  és  $Y$  két független  $\{0,1\}$  egyenletes random szám.

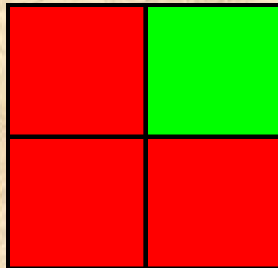
A kontraktus akkor és csak akkor fizet 100-at, ha mindkét szám nagyobb mint 0,5. Egyébként nullát fizet.

## 7. Feladat

$X$  és  $Y$  két független  $\{0,1\}$  egyenletes random szám.  
A kontraktus akkor és csak akkor fizet 100-at, ha mindkét szám nagyobb mint 0,5. Egyébként nullát fizet.

**Megoldás: 25**

Annak a valószínűsége érdekel minket, hogy mindkét szám nagyobb  $\frac{1}{2}$ -nél. Az ábra mutatja hogy  $\frac{1}{4}$  a valószínűség.



## 8. Feladat

$X$  és  $Y$  két független  $\{0,1\}$  egyenletes random szám.  
A kontraktus akkor és csak akkor fizet 100-at, ha  
vagy  $X > 0,75$  vagy  $Y > 0,75$ . Egyébként nullát fizet.

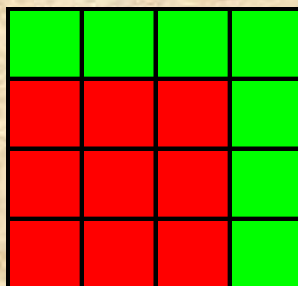


## 8. Feladat

$X$  és  $Y$  két független  $\{0,1\}$  egyenletes random szám.  
A kontraktus akkor és csak akkor fizet 100-at, ha  
vagy  $X > 0,75$  vagy  $Y > 0,75$ . Egyébként nullát fizet.

Megoldás: 44

Az ábra mutatja hogy  $7/16 = 0,44$  a valószínűség.



## 9. Feladat

A rulettben 37 szám van a keréken, az egyik a 0. Ha a 0 jön ki, minden tét ami nem a nullán van, veszít. Figyeltünk egy rulett-kereket órákon keresztül, 1000 pörgetésből 123 nulla volt. A kontraktus annyit fizet, amennyi nulla kijön a következő 500 pörgetésből.

## 9. Feladat

A rulettben 37 szám van a keréken, az egyik a 0. Ha a 0 jön ki, minden tét ami nem a nullán van, veszít. Figyeltünk egy rulett-kereket órákon keresztül, 1000 pörgetésből 124 nulla volt. A kontraktus annyit fizet, amennyi nulla kijön a következő 500 pörgetésből.

**Megoldás: 62**

Ha a rulett-kerék fair lenne, várhatóan 27 nulla kellett volna hogy kijöjjön. Nagyon valószínű, hogy a kaszinó csal. 500 pörgetésből a nullák „korrekt” várható száma 14, az empirikus becslés alapján viszont 62. Empíria >> Prekonceptió

???!?!???

# 10. Feladat

Két piros-kék korongot egyszerre feldobtunk, ezerszer egymás után. Azt tapasztaltuk, hogy az első és a második korong is 513-szor mutatott pirosat. Feldobjuk őket még 100-szor. A kontraktus annyit fizet, ahányszor mindkét korong egyszerre pirosat mutat.

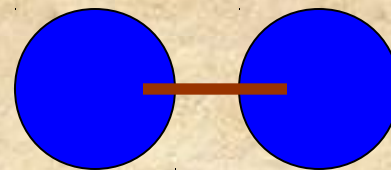
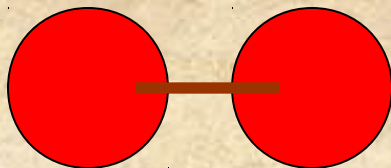


# 10. Feladat

Két piros-kék korongot egyszerre feldobtunk, ezerszer egymás után. Azt tapasztaltuk, hogy az első és a második korong is 513-szor mutatott pirosat. Feldobjuk őket még 100-szor. A kontraktus annyit fizet, ahányszor mindkét korong egyszerre pirosat mutat.

**Megoldás: 50**

Nagyon gyanús, hogy az elő-kísérletben ugyanannyiszor mutattak pirosat a korongok. Az ábra mutatja hogy miért:



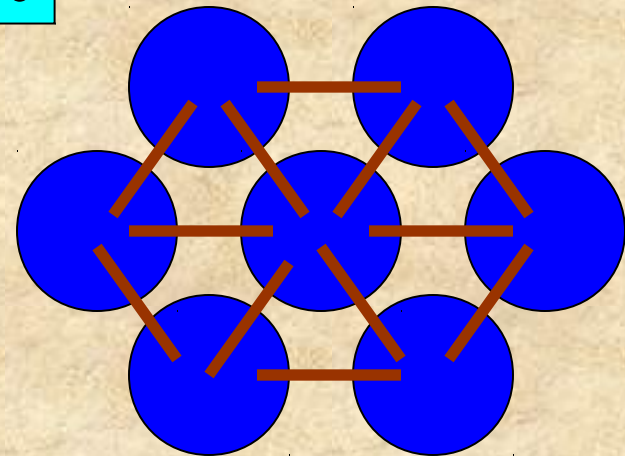
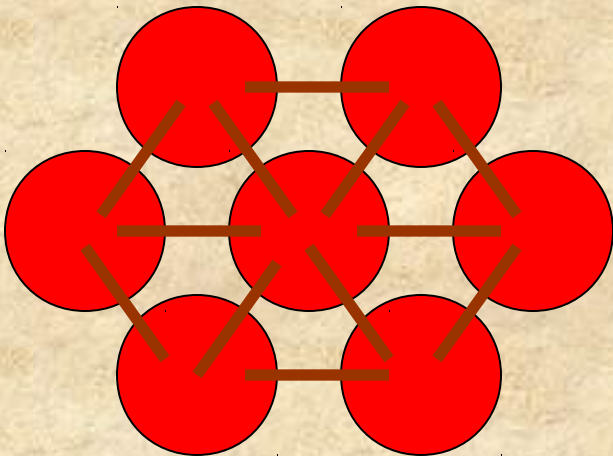
# 11. Feladat

Hét piros-kék korongot egyszerre feldobtunk, ezerszer egymás után. Azt tapasztaltuk, hogy az összes korong 513-szor mutatott pirosat. Feldobjuk őket még 100-szor. A kontraktus annyit fizet, ahányszor mind a hét korong egyszerre pirosat mutat.

# 11. Feladat

Hét piros-kék korongot egyszerre feldobtunk, ezerszer egymás után. Azt tapasztaltuk, hogy az összes korong 513-szor mutatott pirosat. Feldobjuk őket még 100-szor. A kontraktus annyit fizet, ahányszor mind a hét korong egyszerre pirosat mutat.

Megoldás: 50



## 12. Feladat

Az IBM részvény ára jelenleg 187. Egy IBM részvény-opció 100-at fizet, ha az IBM részvény október 10-én drágább mint 190, egyébként semmit. Ennek az opciónak a piaci ára 46. Mekkora az ára annak az opciónak, ami 100-at fizet ha az IBM részvény október 10-én olcsóbb mint 190 (és egyébként semmit)?



## 12. Feladat

Az IBM részvény ára jelenleg 187. Egy IBM részvény-opció 100-at fizet, ha az IBM részvény október 10-én drágább mint 190, egyébként semmit. Ennek az opciónak a piaci ára 46. Mekkora az ára annak az opciónak, ami 100-at fizet ha az IBM részvény október 10-én olcsóbb mint 190 (és egyébként semmit)?

**Megoldás: 54**

Következik az arbitrázs-mentesség feltételéből. Így 100-ért megvehetjük mindkét opciót, és a visszafizetés garantáltan 100.

# 13. Feladat

A Bayern vezet a Madrid ellen 2:1-re a mérkőzés 81. percében. Azt a fogadást ami 100-at fizet a Bayern győzelme esetén, a fogadó-iroda jelenleg 79-re árazza. A döntetlen esetén 100-at fizető fogadást 19-re, a Madrid győzelme esetén 100-at fizető fogadást 2-re árazza az iroda. Mennyi az ára annak a fogadásnak ami 100-at fizet, ha lesz még gól és a Madrid lövi a következő gólt?

## 13. Feladat

A Bayern vezet a Madrid ellen 2:1-re a mérkőzés 81. percében. Azt a fogadást ami 100-at fizet a Bayern győzelme esetén, a fogadó-iroda jelenleg 79-re árazza. A döntetlen esetén 100-at fizető fogadást 19-re, a Madrid győzelme esetén 100-at fizető fogadást 2-re árazza az iroda. Mennyi az ára annak a fogadásnak ami 100-at fizet, ha lesz még gól és a Madrid lövi a következő gólt?

**Megoldás: 21**

A „next goal Madrid” gyakorlatilag ekvivalens azzal hogy nem nyer a Bayern.

# 13+1. Feladat

Két testvérem van. Mind a hárman és szüleink is a XX. században születtünk. A kontraktus ötünk születési évszámainak (az 1900 feletti, például 1957 -> 57) kerekített átlagát fizeti.



# 13+1. Feladat

Két testvérem van. Mind a hárman és szüleink is a XX. században születtünk. A kontraktus ötünk születési évszámainak (az 1900 feletti, például 1957  $\rightarrow$  57) átlagát fizeti.

**Megoldás: 60**

43, 44, 67, 70, 78  $\rightarrow$  átlag = 60

Hiányos információ esetén is lehet ésszerűen becsülni...

# Eredményhirdetés

- Összegezzétek a profitjaitokat !
- Sikerült nyereséget elérni ?
- Ki érte el a legnagyobb profitot ?