



## ATOMCSILL 250

# Folyadékok fizikájáról folyékonyan – avagy hogyan ugorjunk fejest a kutatói létbe?

*Kadlecsik Ádám* – az ELTE fizikus hallgatója, tatai Eötvös-öregdiák

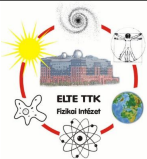
*Gombási Róbert Krisztián* – a BME mechatronikai mérnök hallgatója, tatai Eötvös-öregdiák

*Rossz Koppány* - a tatai Eötvös József Gimnázium és Kollégium diákja

*Tasnádi Bálint* – a tatai Eötvös József Gimnázium és Kollégium diákja

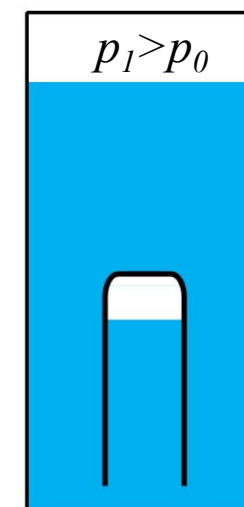
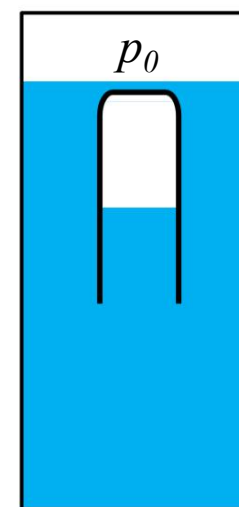
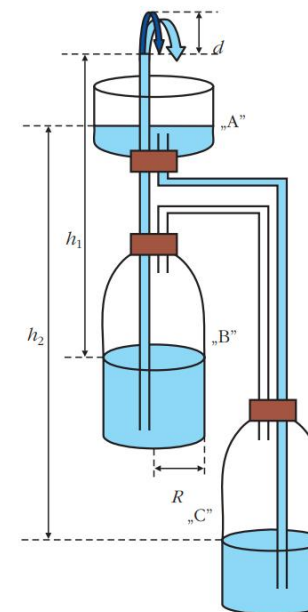
*Szeidemann Ákos* – a tatai Eötvös József Gimnázium és Kollégium kémia-fizika szakos tanára, tatai Eötvös-öregdiák

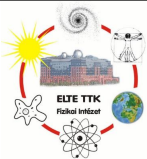
**Budapest. 2023. március 9.**



# Izgalmas folyadékos problémák

- Hérón szökőkútja
  - működésének lényege iskolában is tanítható
  - már szükség van áramlástani ismeretekre
- Irreverzibilis Cartesius-búvár
  - érettégizőknek hasznos
  - számítási feladatokhoz kapcsolható (OKTV)
- **Cseppprobbanás: Marangoni-effektus**
  - szakköri kutatómunkára alkalmas
  - kémia/fizika határterület
- **Boycott-effektus**
  - döntött edényben történő ülepedés
  - bonyolult probléma, de analógiásan kezelhető
- **Sokszögörvény**
  - már a létrehozása sem triviális
  - hátterének fizikája igen bonyolult

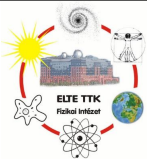




# Mit profitálhat ezekből egy diák?



- triviális válaszok:
  - önállóan (kis csapatban) kísérleteket végez
  - fejlődik több területen
    - lényeglátás - a tiszta gondolatmenet minél egyszerűbb elmagyarázása
    - az ördög a részletekben rejlik - sok mérés szükséges új összefüggések megfogalmazásához
- nem triviális válaszok:
  - idegen nyelven szakirodalmat olvas, értelmez
  - fejlődik a kreativitása
  - kísérleti összeállítást, mérési eljárást tervez
  - mérési adatokat kiértékel - adott esetben saját szoftverrel
  - megtapasztalja a kutatói gondolkodásmód szépségeit és nehézségeit
    - döntően befolyásolhatja a pályaválasztását

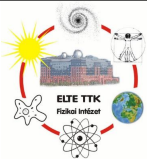


# Mit profitálhat ezekből egy tanár?



- triviális válaszok:
  - szellemi kaland, kihívás
  - közös szakköri munka a diákokkal
- nem feltétlen triviális válaszok:
  - néhány elem átemelhető a tanítási gyakorlatba (vagy kísérletbemutatókra, Kutatók Éjszakájára)
  - szakdidaktikai fejlődés: a (tehetséges) diákok gondolkodásmódjának mélyebb megismerése, gyenge oldalak feltérképezése (pl. szóbeli, írásbeli)
  - kutatócsoportban való részvétel (ELTE - fizika tanítása)
    - hipotézis: a diákok jól meghatározott nehézségű nyílt problémák otthoni vizsgálatával, “kutatási napló” készítésével fejleszthetőek több területen, amit normál tanórán meg sem kísérelünk, pedig...





# Egyéb fontos “hozádékok”

- *“Idős nyugdíjasként (...) talán megengedhető, ha rámutatok arra a hatalmas társadalmi felelősségre, amely a rohamosan kibontakozó környezeti katasztrófa és a vele járó gazdasági és társadalmi válság, háborúk, lakhatatlanná váló területek, tömeges migráció, járványok, úrfegyverkezés, biológiai- és mesterségesintelligencia-kutatás és számtalan további fejlemény következtében a kutató közösségre hárul.”*

Kondor Imre (a Bolyai Kollégium alapító igazgatója, FizSzemle, 2023. január) az elitképzés kapcsán

- szükség van iskolai műhelyekre, tehetséggondozásra
- szükség van fizikatanárookra, az ő közösségeikre, akik előremutató fejlesztéseket, módszertani újításokat végeznek
- szükség van IYPT típusú versenyekre, amely az egyént és az egyének kooperációját is fejleszti (egymástól tanulás, csapat tagjainak motiválása egy közös cél /a probléma megoldása/ érdekében)

~~• Aki tudja, csinálja, aki nem, az tanítja.~~

amit olvasunk, annak 10%-át,

amit látunk, annak 30%-át,

amiről beszélgetünk, annak 70%-át,

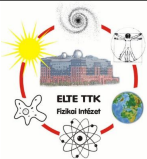
amit hallunk, annak 20%-át,

amit látunk és hallunk, annak 50%-át,

amit saját magunk csinálunk, annak 80%-át,

**amit tanítunk, annak 95%-át tanuljuk meg - előadás, elmagyarázás**

- **kutatni menő, a fizikát tudni menő**



# Az előadó diákok

- *Rossz Koppány és Tasnádi Bálint*

11. évfolyamos mat-fiz faktos diákok (kémia, informatika, idegen nyelv)

ELTE TDK (középisk. kat. 1. hely)

cikk előkészületben

- *Gombási Róbert*

2021, 2022 HYPT versenyen első 10-be került, a nemzetközi versenyre készülő csapat tagja volt

BME TDK

cikk előkészületben

- *Kadlecsik Ádám*

2018 AYPT csapattag

2019, 2020 IYPT csapattag (2020-ban a hazai válogató nyertese)

ELTE TDK (2. hely) témavezető: Vincze Miklós

nemzetközi cikk (szerzőtársak: Vincze Miklós, Szeidemann Ákos)

# Hidrofób folyadékfelületen létrejövő cseppprobbanás jelenségének vizsgálata

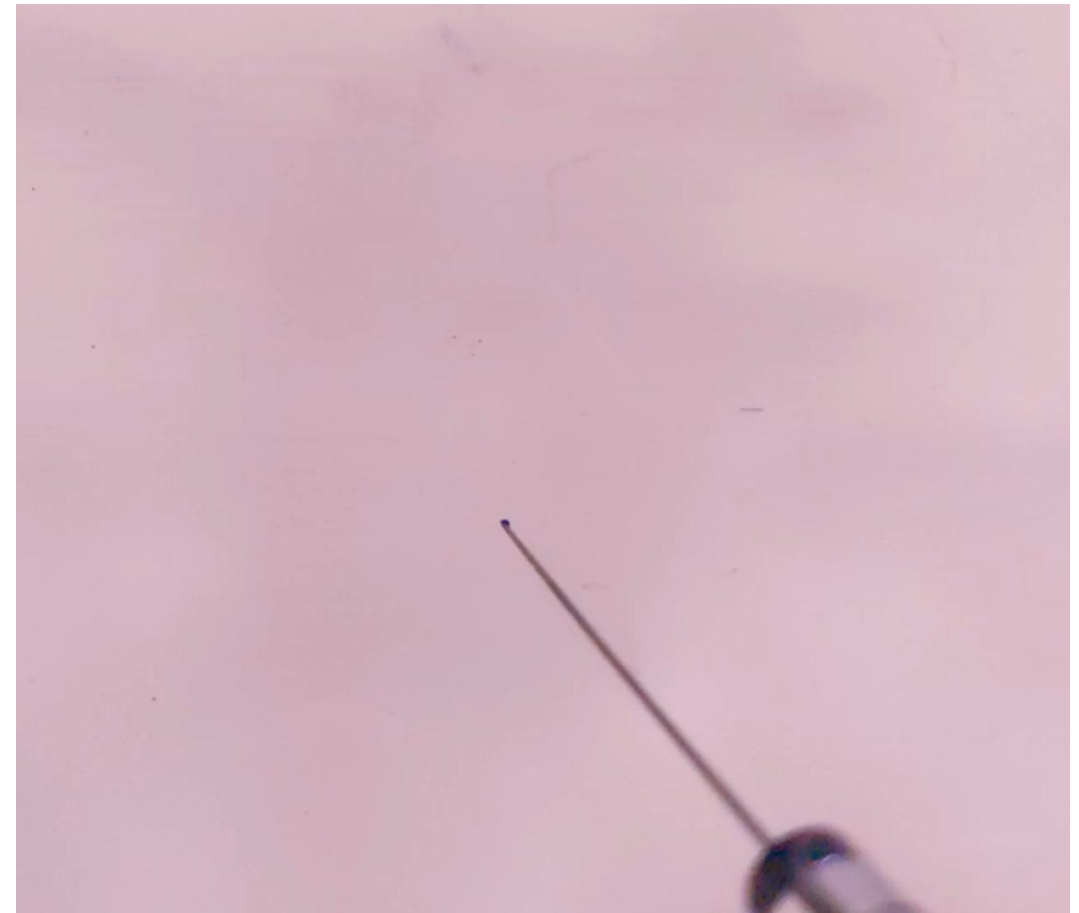
Tasnádi Bálint, Rossz Koppány

*Eötvös József Gimnázium és Kollégium, Tata*

mentor: dr. Szeidemann Ákos

# Bevezető

*„Előfordulhat, hogy ha egy víz és más folyadék (pl.: alkohol) keverékéből egy cseppet hidrofób folyadék (pl.: olaj) felszínére csöppentünk, akkor a létrejövő csepp több kisebb cseppre esik szét. Vizsgáld meg a szétesést befolyásoló paramétereket és a véglegesen kialakuló cseppek méretét.” [22]*

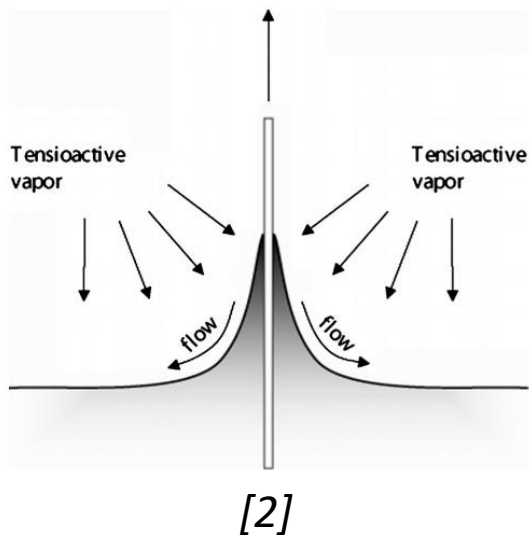


Saját felvétel

# Bevezető

Marangoni-hatás: felületi feszültség és/vagy hőmérsékleti gradiens indukálta áramlás

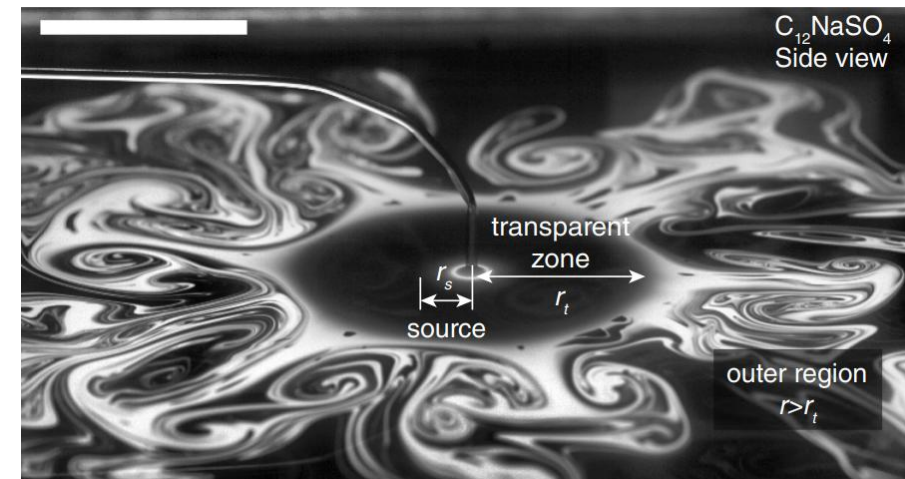
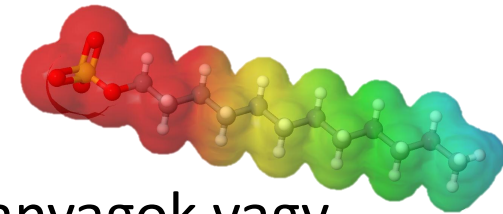
- Vízi élőlények mozgása [1]
- Félvezetőgyártás: szilíciumlemezek tisztítása [2]



Molnárpoloska a vízen

# Irodalmi áttekintés

- Eddigi tanulmányok:
  - Felületfeszültség-gradiens: hagyományos felületaktív anyagok vagy hőmérséklet-gradiens [3-6]
- Borkönnyek:
  - Felületaktív anyag: alkohol
  - Gradiens: egyenetlen párolgás
  - Folyadék szilárdon [7-8]



[3]

# Célkitűzés

- 2021-22 IYPT: Cseppprobbanás
  - Felületaktív anyag: Alkohol, aceton
  - Gradiens: egyenetlen párolgás
  - Folyadék folyadékon
- Keiser, Bense, Colinet, Bico & Reyssat (2017).: Vizsgálták a csepp területét
- Hasegawa & Manzaki (2021).: Vizsgálták a hőmérséklet hatását
- Seyfert, Marin, Alvaro (2022): Vizsgálták a színezék hatását az instabilitás hullámhosszára

# Tartalom

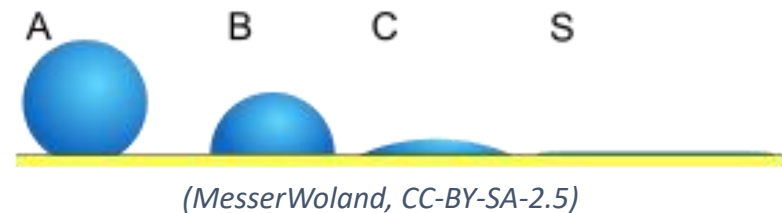
- Elméleti megalapozás
  - Terülés feltétele, nedvesítés
  - Marangoni áramok
  - Elméleti modell  $R_{max}$ -ra
- Gyakorlati megvalósítás
  - Megvilágítás, színezés
  - Cseppentés
  - Elemzés
- Mérések
  - Belső csepp sugara





# Terülés

- Adhéziós erők: terüléshez vezetnek
- Kohéziós erők: gömbölyödéshez vezetnek
- Terülés feltétele:



$$W_{adh} - W_{koh} > 0$$

$$(\gamma_{ma} + \gamma_{oa} - \gamma_{mo}) - (2\gamma_{ma}) > 0$$

$$\gamma_{oa} - \gamma_{mo} - \gamma_{ma} > 0$$

S területi paraméter:

$$S = \gamma_{oa} - \gamma_{mo} - \gamma_{ma}$$

**Terülést várunk, ha  $S > 0$ .**

Elméleti megalapozás

Gyakorlati megvalósítás

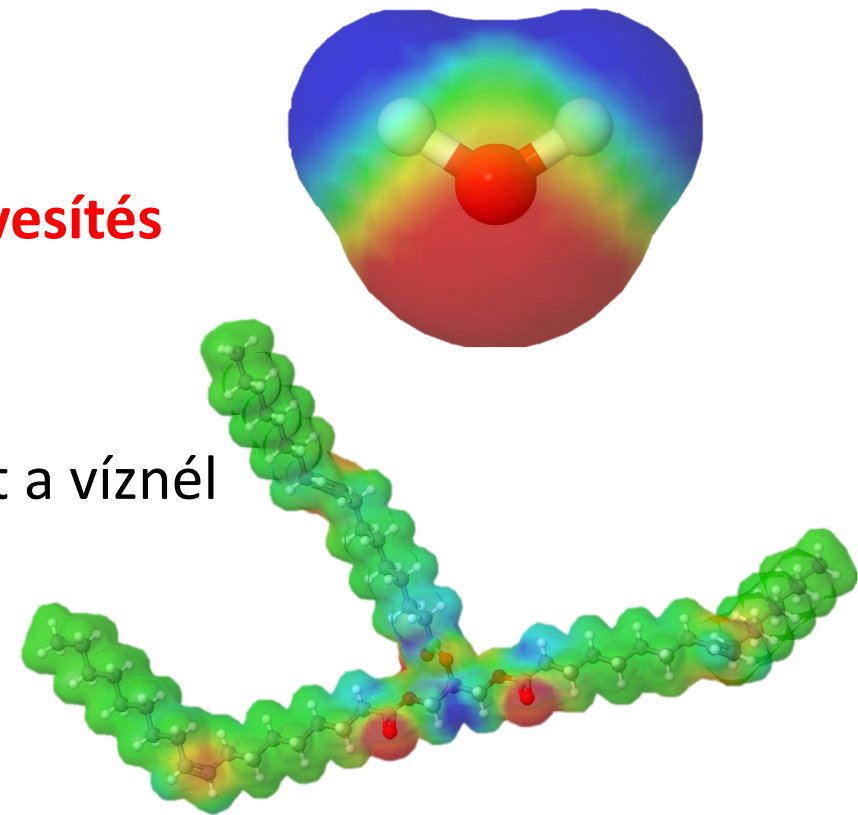
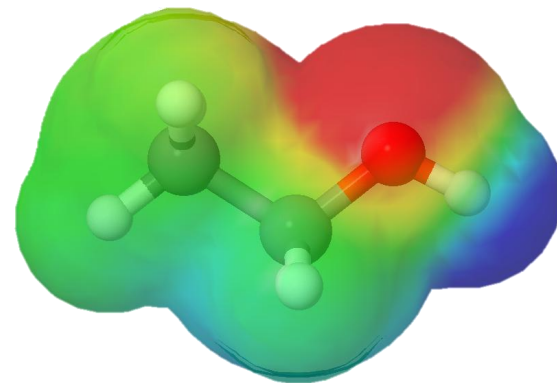
Mérések

# Nedvesítés

- Nedvesítés víz és olaj között:
  - Kohéziós erők: H-kötés, dipól-dipól
  - Adhézios erők: gyakorlatilag nincsenek
- Nedvesítés alkohol és olaj között:
  - Kohéziós erők: H-kötés, dipól-dipól, gyengébb, mint a víznél
  - Adhézios erők: diszperziós

**Nincs nedvesítés**

**Van nedvesítés**



Elméleti megalapozás

Gyakorlati megvalósítás

Mérések

# Nedvesítés

- Nedvesítés víz-alkohol elegy és olaj között:
  - Alkohol csökkenti a víz  $\gamma$ -t
  - Terülés, ha az alkohol koncentráció elég nagy

$$S > 0, \text{ ha } \phi_0 > \phi_c$$

Felületaktív anyag	$\phi_c$	Gőznyomás (kPa) 20°C-on
Metanol	0,875±0,025	13,02 <sup>[11]</sup>
Etanol	0,6375±0,0225	5,79 <sup>[12]</sup>
1-Propanol	0,375±0,025	1,99 <sup>[13]</sup>
2-Propanol	0,350±0,025	4,4 <sup>[14]</sup>
1-Butanol	-	0,73 <sup>[13]</sup>
Aceton	0,763±0,013	25,54 <sup>[15]</sup>
Víz	-	2,34

I. táblázat. Saját mérések

Elméleti megalapozás

Gyakorlati megvalósítás

Mérések

# Az alkohol típusa

- $\phi_c$  szénatomszámmal csökken (Traube-szabály)
  - Nagyobb szénatomszámok: nem elegyednek vízzel, kevésbé párolognak
- Párolgási ráta: befolyásolja a jelenség időtartamát
  - *Feltételezés: víz párolgása elhanyagolható az alkoholéhoz képest [16; 9]*

Felületaktív anyag	$\phi_c$	Gőznyomás (kPa) 20°C-on
Metanol	0,875±0,025	13,02 <sup>[11]</sup>
Etanol	0,6375±0,0225	5,79 <sup>[12]</sup>
1-Propanol	0,375±0,025	1,99 <sup>[13]</sup>
2-Propanol	0,350±0,025	4,4 <sup>[14]</sup>
1-Butanol	-	0,73 <sup>[13]</sup>
Aceton	0,763±0,013	25,54 <sup>[15]</sup>
Víz	-	2,34

I. táblázat. Saját mérések

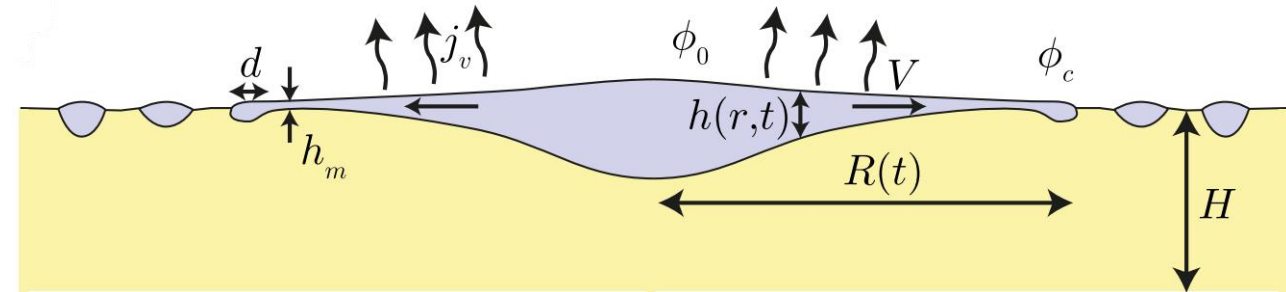
Elméleti megalapozás

Gyakorlati megvalósítás

Mérések

# Elméleti megalapozás

- Általánosságban:
  - ,víz' ne nedvesítse az ,olajat'
  - ,alkohol' nedvesítse az olajat
  - ,alkohol' elegyedjen a ,vízzel'
  - ,alkohol' jobban párologjon, mint a ,víz'



[9]

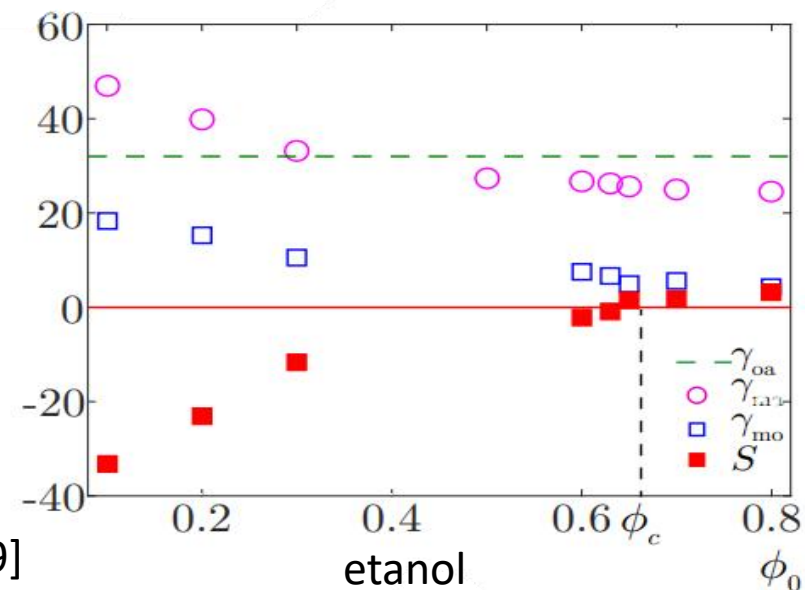
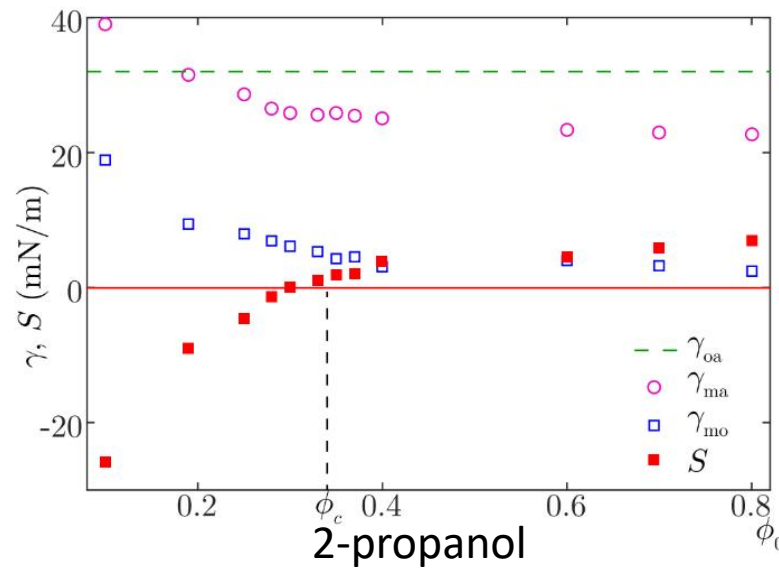
Elméleti megalapozás

Gyakorlati megvalósítás

Mérések

# Felületi feszültségek

$$S = \gamma_{oa} - \gamma_{mo} - \gamma_{ma}$$



$\phi_0$  növelésével  $S$  nő, zérushelye  $\phi_c$

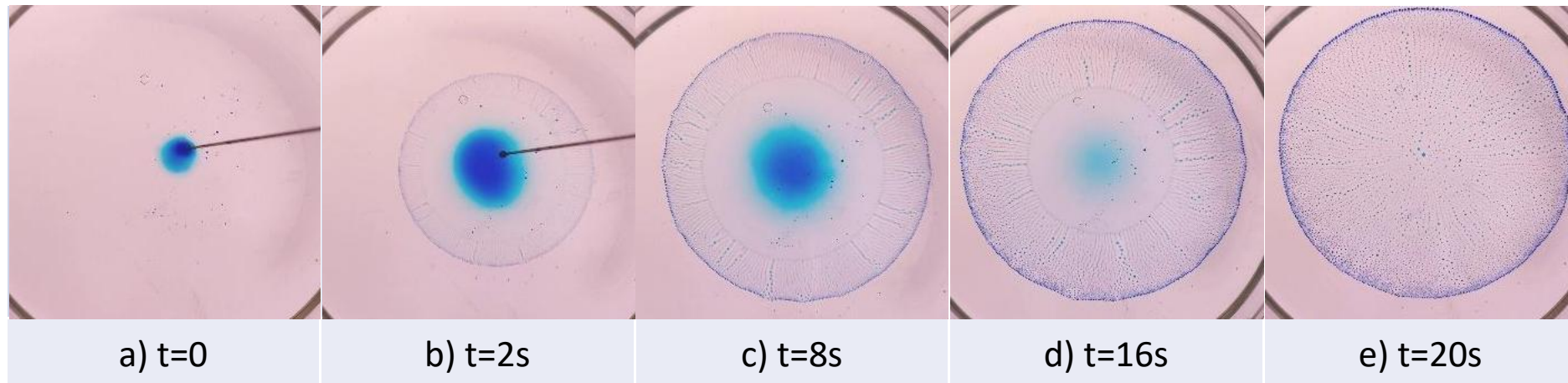
Elméleti megalapozás

Gyakorlati megvalósítás

Mérések

# Terülés

- Terülés, ha  $\phi_0 > \phi_c$



- Vastagság nem egyenletes

Elméleti megalapozás

Gyakorlati megvalósítás

Mérések

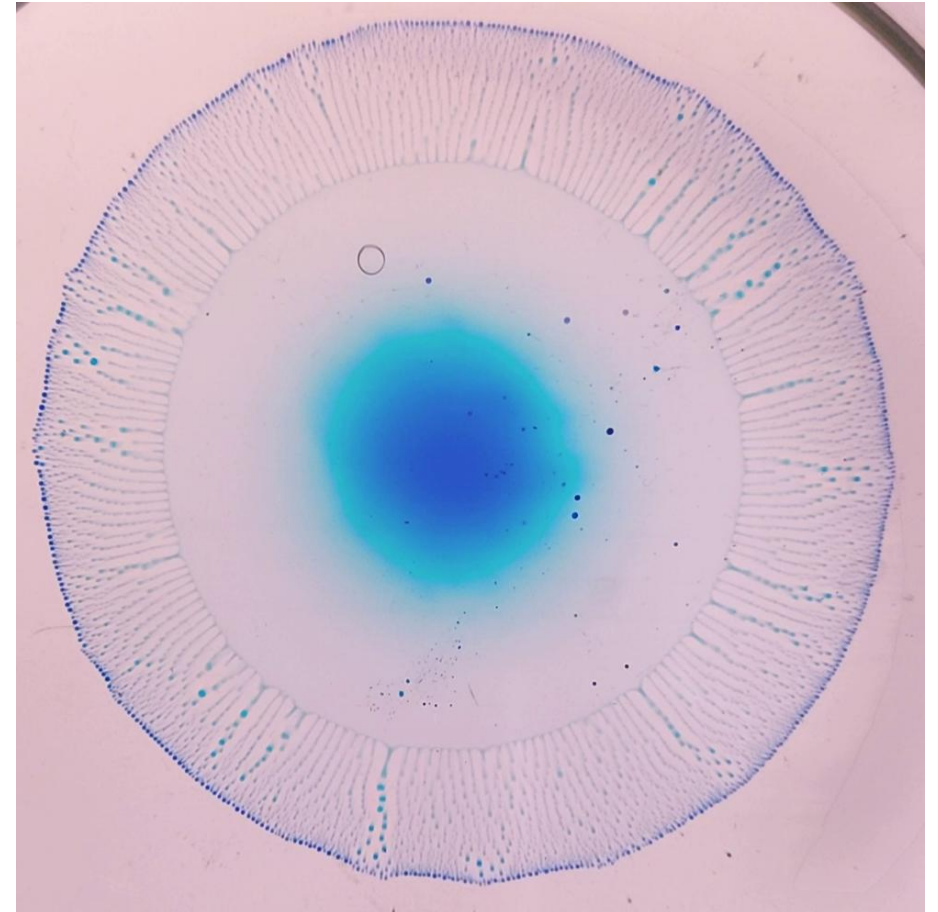
# Felületifeszültség-gradiens

- Csepp vastagsága nem egyenletes
- Párolgás csak a felülettől függ

$\phi$  kijebb kisebb, beljebb nagyobb



**Felületifeszültség-gradiens**



Elméleti megalapozás

Gyakorlati megvalósítás

Mérések



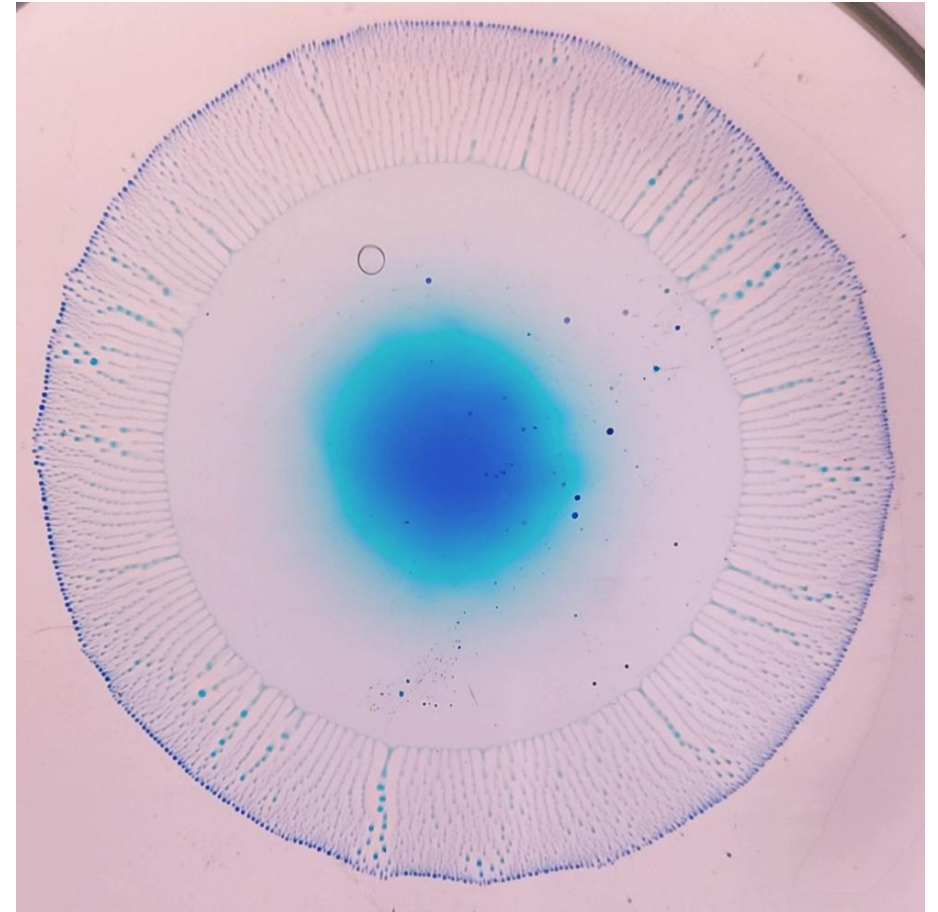
# Felületifeszültség-gradiens

- $\gamma$  beljebb kisebb, kívül nagyobb



**Marangoni-áram**

középről kifelé



Elméleti megalapozás

Gyakorlati megvalósítás

Mérések

# Marangoni-áram

Feltételezés:  $\phi$  közepén  $\phi_0$ , peremnél  $\phi_c$  ( $\leftarrow$  csak  $R_{max}$ -nál pontos)

$$\sigma_M \sim \frac{\Delta\gamma}{R_{max}} \quad (1)$$

$$\Delta\gamma = \gamma_c - \gamma_0.$$

*Csak  $R_{max}$ -nál igaz*

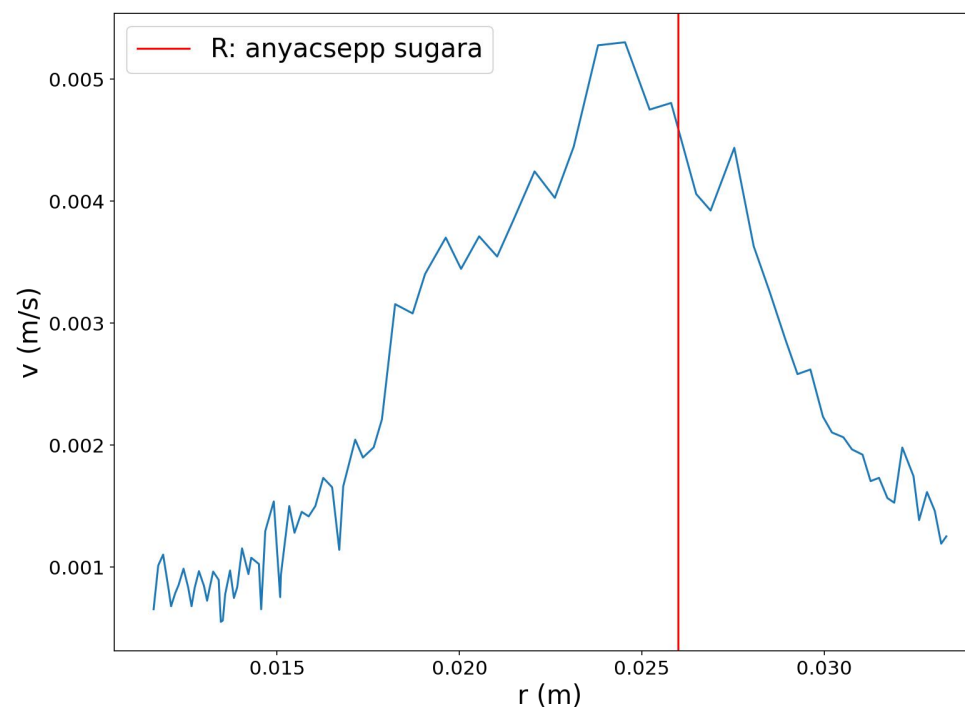
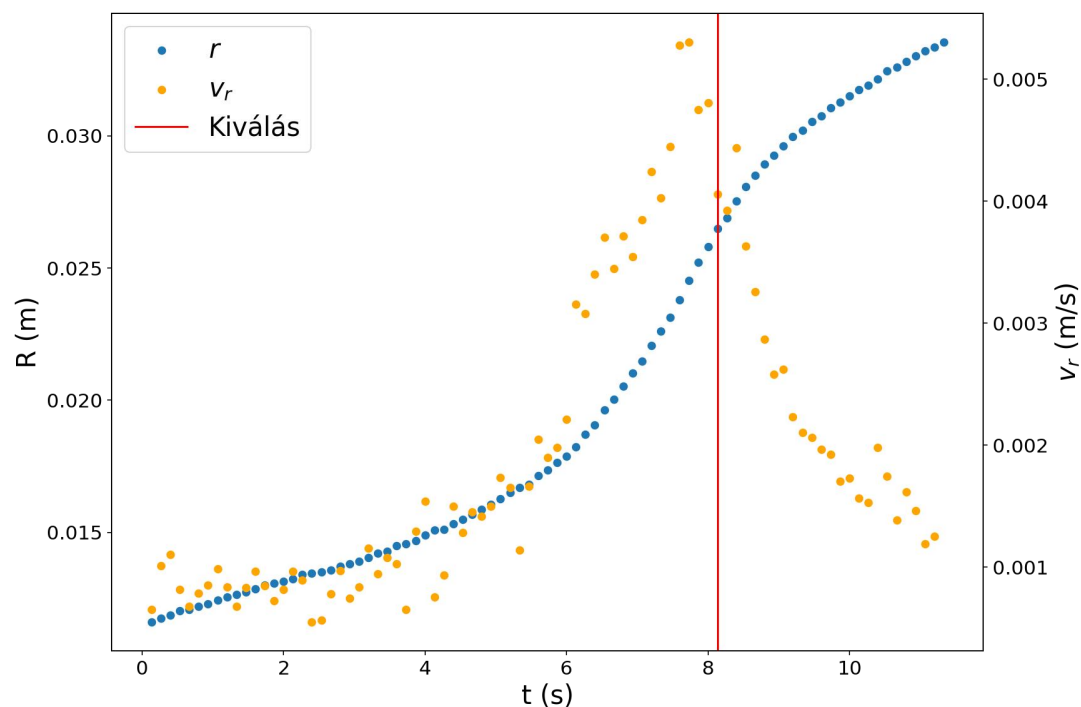
Elméleti megalapozás

Gyakorlati megvalósítás

Mérések

# Áramlási sebesség

- $\text{CaCO}_3$  por a csepp felszínén



Elméleti megalapozás

Gyakorlati megvalósítás

Mérések

# Viszkózus áramlás az olajban

- $V_{olaj} \approx V_{csepp} \rightarrow$  nincs nyírás a csepp és olaj között



Viszkózus disszipáció van az olajban

- Mélysége:  $\delta(t) \approx 5,0\sqrt{\nu t}$  [17]
- $\delta$  néhány másodperc alatt eléri a kád alját (H)

$$\sigma_o \sim \frac{\eta_{olaj} V_{olaj}}{H} \quad (2)$$

Elméleti megalapozás

Gyakorlati megvalósítás

Mérések

# Elméleti modell a maximális sugárra

- Feszültségkontinuitás:  $\sigma_M = \sigma_o$  [18]

$$V_{Rmax} \sim \frac{\Delta\gamma H}{\eta_{olaj} R_{max}} \quad (3)$$

- Vezessük be  $\tau$ -t:

$$\tau \sim \frac{R_{max}}{V_{Rmax}} \quad (4)$$

Elméleti megalapozás

Gyakorlati megvalósítás

Mérések

# Elméleti modell a maximális sugárra

- $R_{max}$ -nál igaz, hogy

$$(\phi_0 \Omega_0 - \phi_c \Omega_{végső}) \sim \rho j_v R_{max}^2 \tau \quad (5)$$

- Víz párolgása elhanyagolható:

$$(1 - \phi_0) \Omega_0 = (1 - \phi_c) \Omega_{végső} \quad (6)$$

Elméleti megalapozás

Gyakorlati megvalósítás

Mérések

# Elméleti modell a maximális sugárra

$$(3)(4)(5)(6) \Rightarrow R_{max} \sim \underbrace{\left( \frac{(\phi_0 - \phi_c) \Delta\gamma H \Omega_0}{(1 - \phi_c) \eta_o j_v} \right)^{\frac{1}{4}}}_{R^*} \quad (7)$$

- $\phi_0$  a kezdeti keverék tömegszázalékos koncentrációja
- $\phi_c$  a terüléshez szükséges minimális koncentráció
- $\Delta\gamma = \gamma_c - \gamma_0$
- $H$  az olajkád mélysége
- $\Omega_0$  a cseppentés térfogata
- $\eta_o$  az olaj dinamikai viszkozitása
- $j_v$  az alkohol párolgási fluxusa, tömegre vetített párolgási sebesség és a sűrűségének hányadosa

Elméleti megalapozás

Gyakorlati megvalósítás

Mérések

# Csepprobbanás

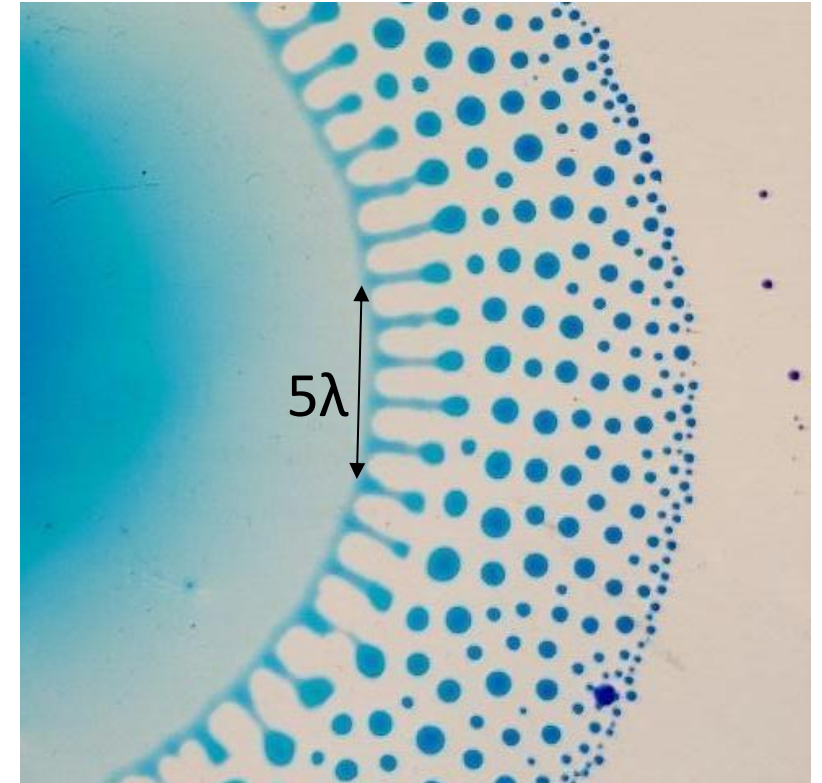
- Párolgás: csepp szélén  $\phi$  csökken, ha  $\phi \leq \phi_c$ : terület megáll
- $\Delta\gamma$  marad: Marangoni áram marad

Vastag, instabil perem

- Ujjszerű források
- Kis cseppek leválnak



- Térfogatvesztés, csepp összemegy



Elméleti megalapozás

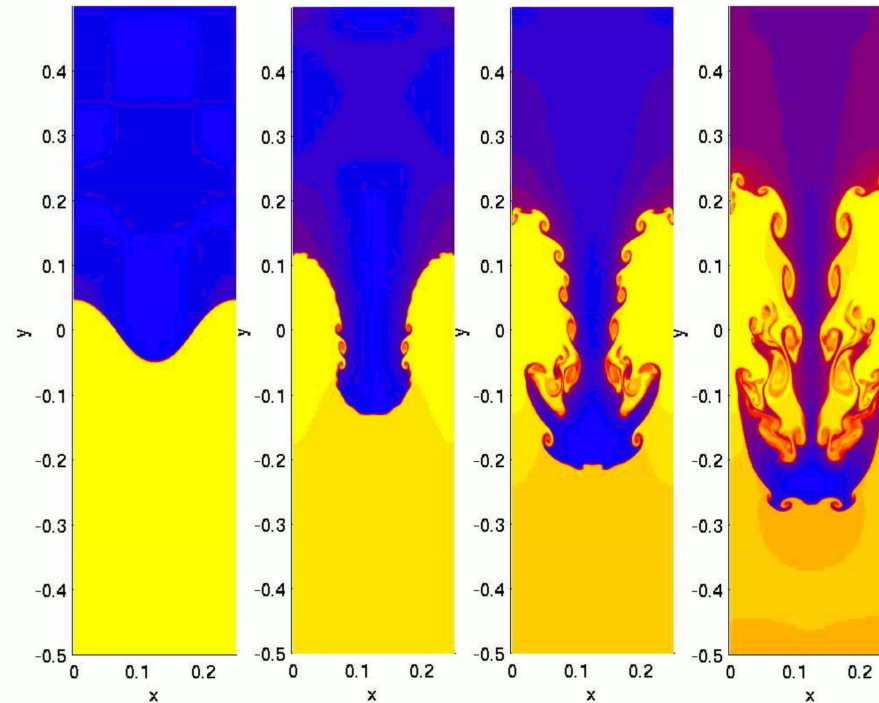
Gyakorlati megvalósítás

Mérések

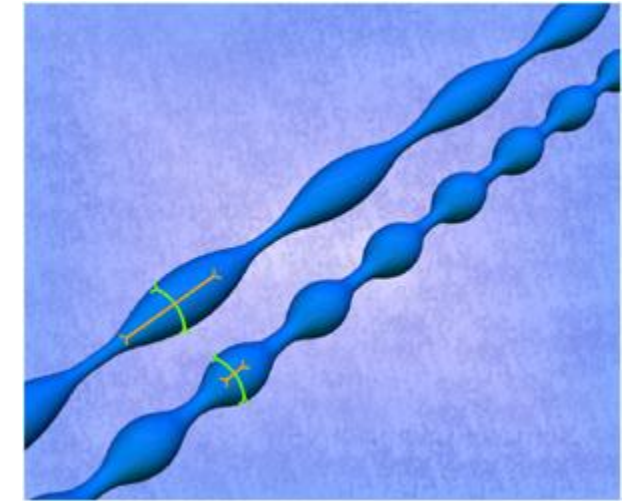


# Instabilitás

- Plateau-Rayleigh?
- Rayleigh-Taylor?
- Saffman-Taylor?
- Általánosságban:
  - $\phi_0 n_0$ ,  $\lambda$  csökken



(Shengtai Li, LANL)



(Cambridge University Press CC BY)

Elméleti megalapozás

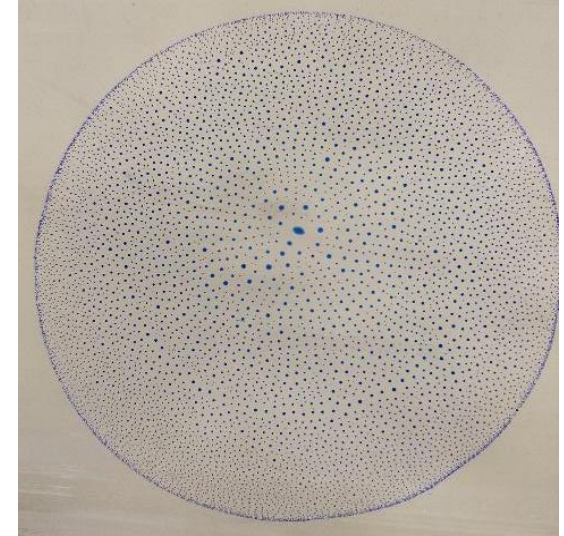
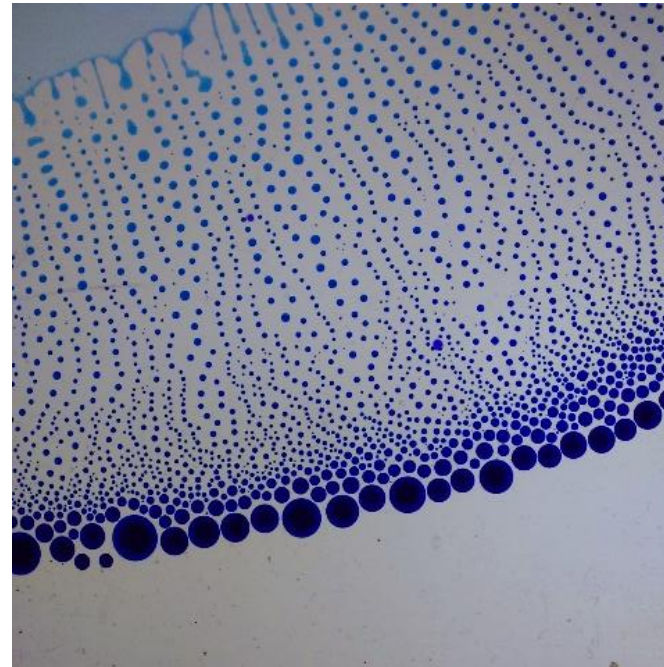
Gyakorlati megvalósítás

Mérések

# Kis cseppek

- Eleinte lendület megmarad, olaj lefékezi
- Párolgás:  $\phi$  tovább csökken  $\rightarrow \gamma$  nő

Koagulálnak



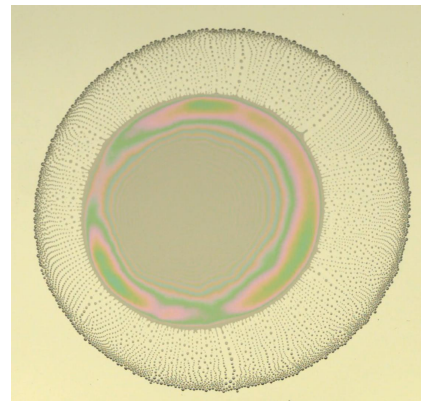
Elméleti megalapozás

Gyakorlati megvalósítás

Mérések

# Gyakorlati megvalósítás

- Megvilágítás: rossz LCD monitor
  - LCD réteget kivettük, helyére LED szalag
- Mérések nagy Petri-csészében
- Vékonyfilm-interferencia: nekünk nem sikerült ( $\Omega_0$  túl nagy)



[9]



Elméleti megalapozás

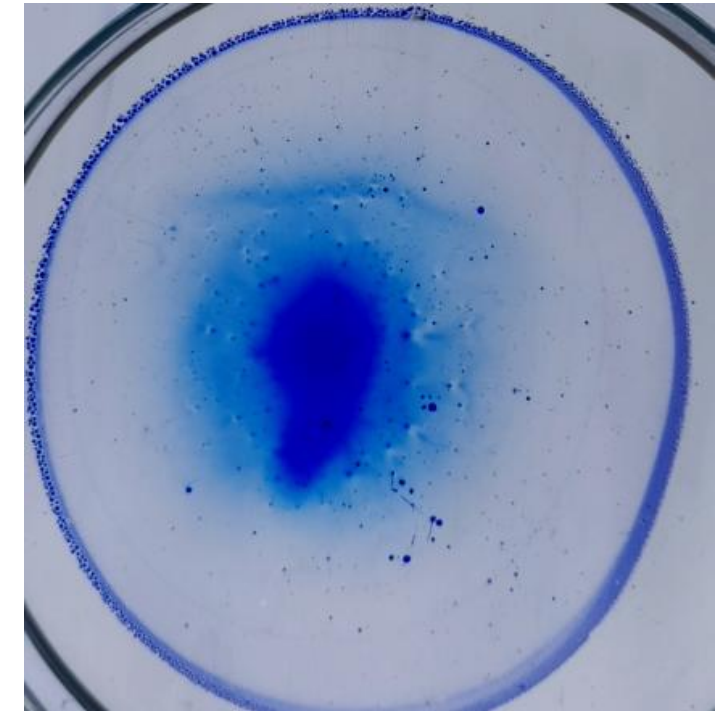
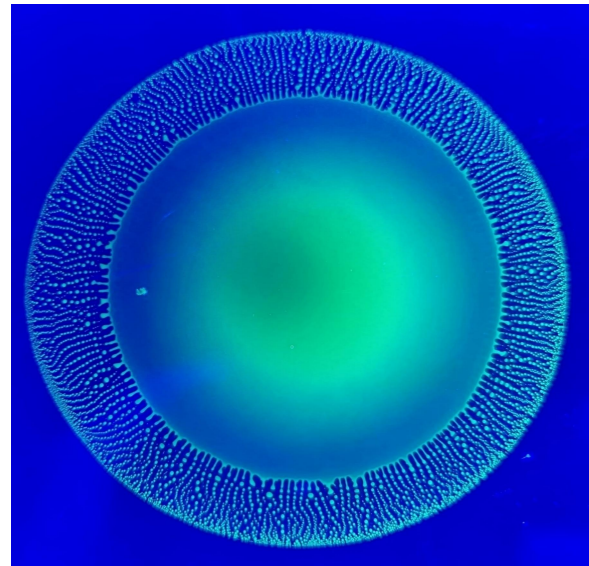
Gyakorlati megvalósítás

Mérések



# Színezés

- Néhány század gramm metilkék
  - Nagyon erős színezék
  - Magas  $\phi_0$ : spontán kiválások
- Fluoreszcein-nátrium
  - Saját fény, kevesebb is elég
  - Jobban oldódik
  - 490nm LED szalag



Elméleti megalapozás

Gyakorlati megvalósítás

Mérések

# Cseppentés

- 25 – 75 $\mu$ l: Hamilton fecskendő
- 75 – 150 $\mu$ l: mechanikus pipetta
- 150 – 1000 $\mu$ l: üvegpipetta



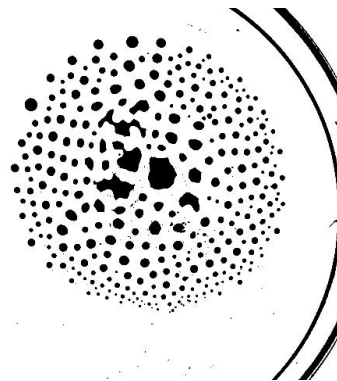
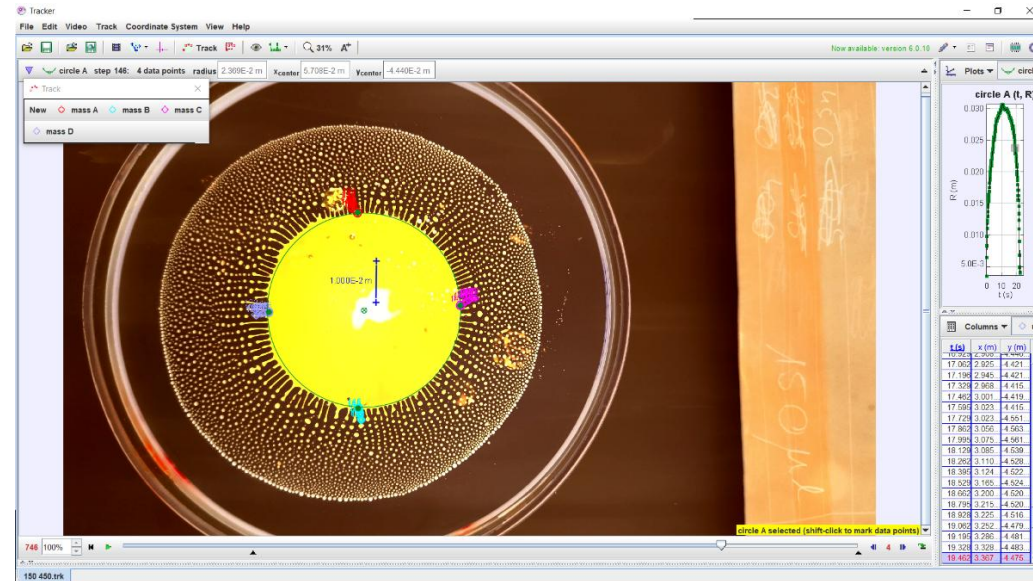
Elméleti megalapozás

Gyakorlati megvalósítás

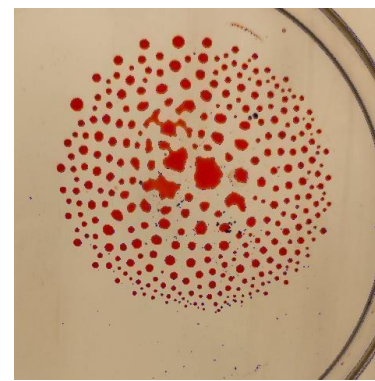
Mérések

# Elemzés

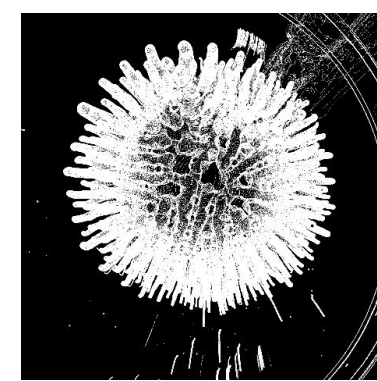
- 4K 30fps videó
- Tracker
  - 4 pontra körillesztés
  - Áramlási sebesség
- Cseppfelismerés
  - Python cv2



Elméleti megalapozás



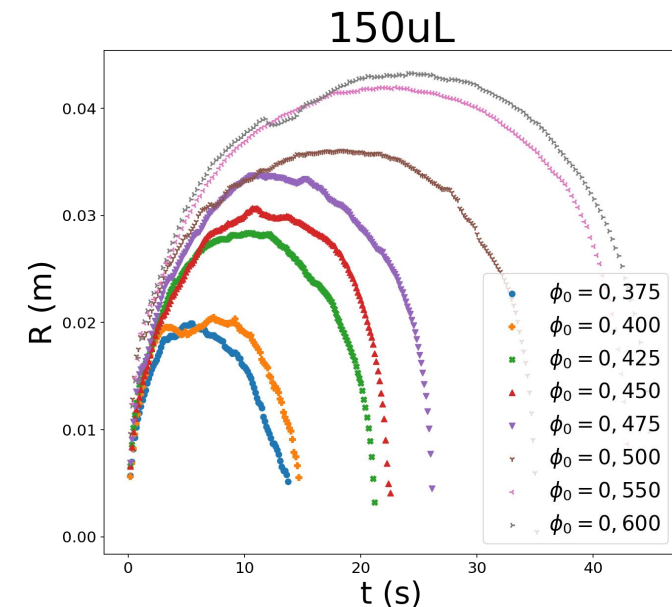
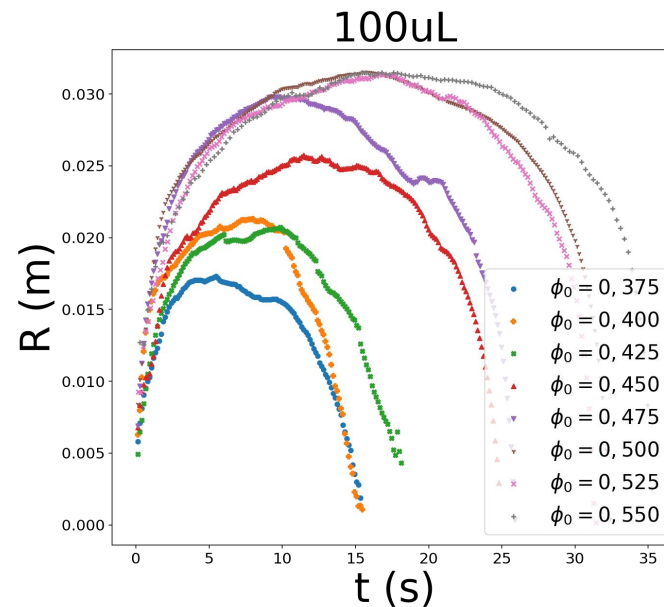
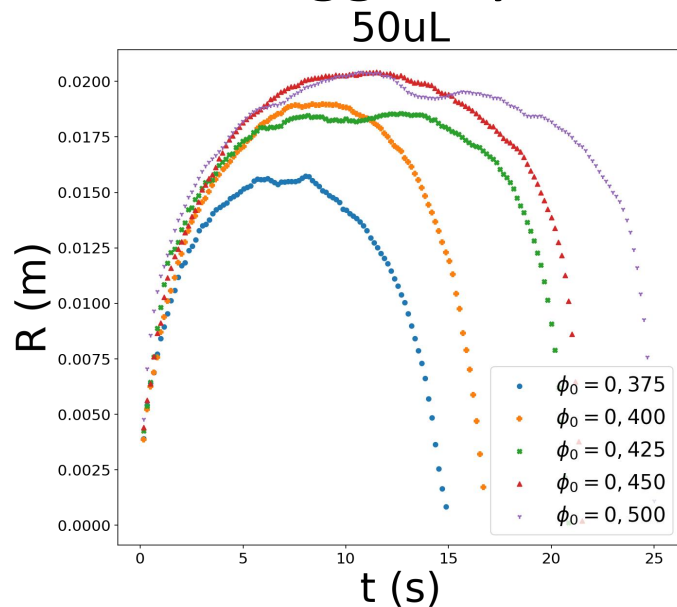
Gyakorlati megvalósítás



Mérések

# Mérések: belső csepp sugara

- $\Omega_0$  és  $\phi_0$  nő  $\rightarrow R_{max}$  és  $t_{Rmax}$  nő
- Összes függvény hasonló alakú



Elméleti megalapozás

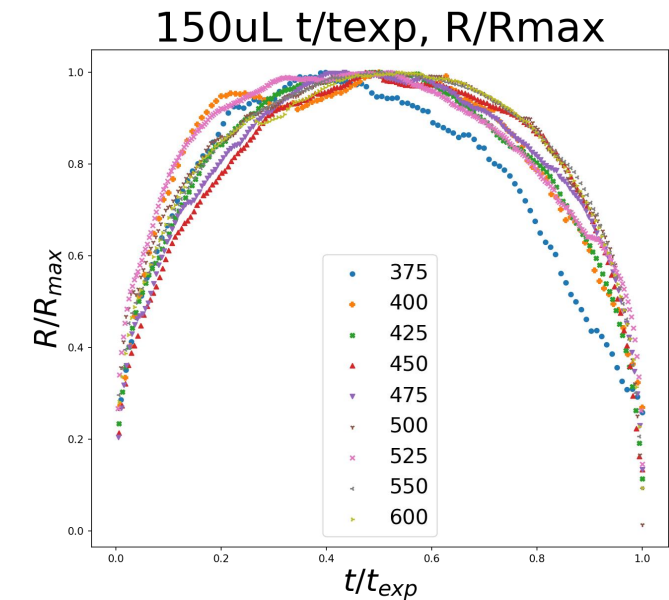
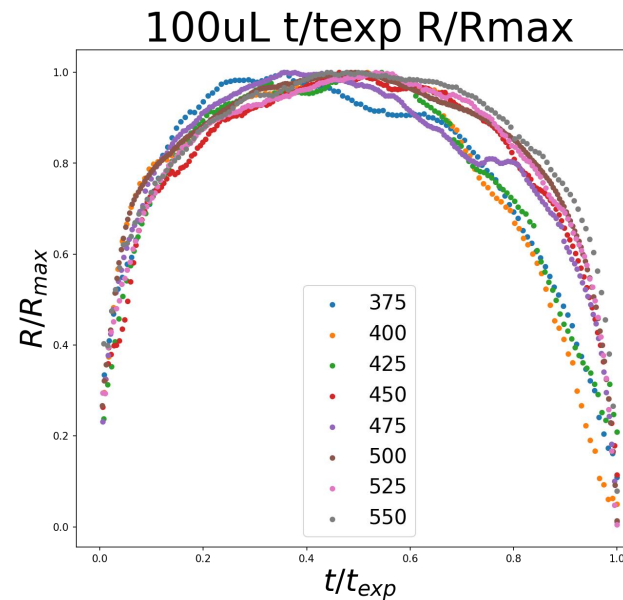
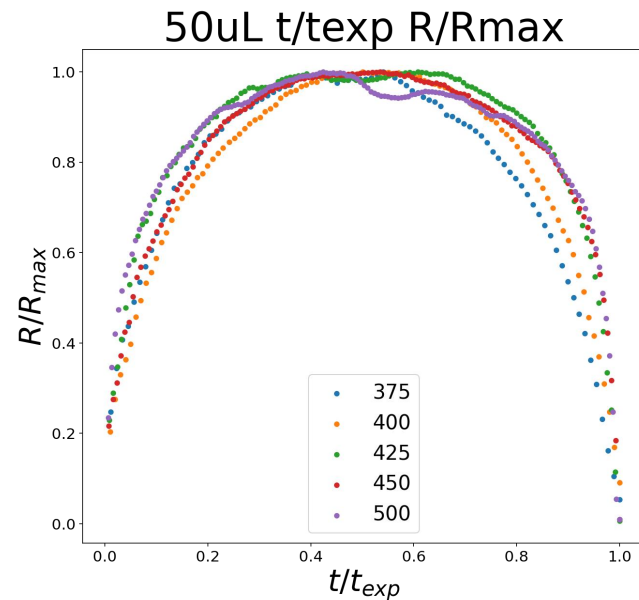
Gyakorlati megvalósítás

Mérések



# Mérések: belső csepp sugara

- $R_{max}$ -ra és  $t_{exp}$ -re normalva egy görbe



- Ezért használhatunk arányossági törvényeket  $R_{max}$ -ra és  $t_{Rmax}$ -ra

Elméleti megalapozás

Gyakorlati megvalósítás

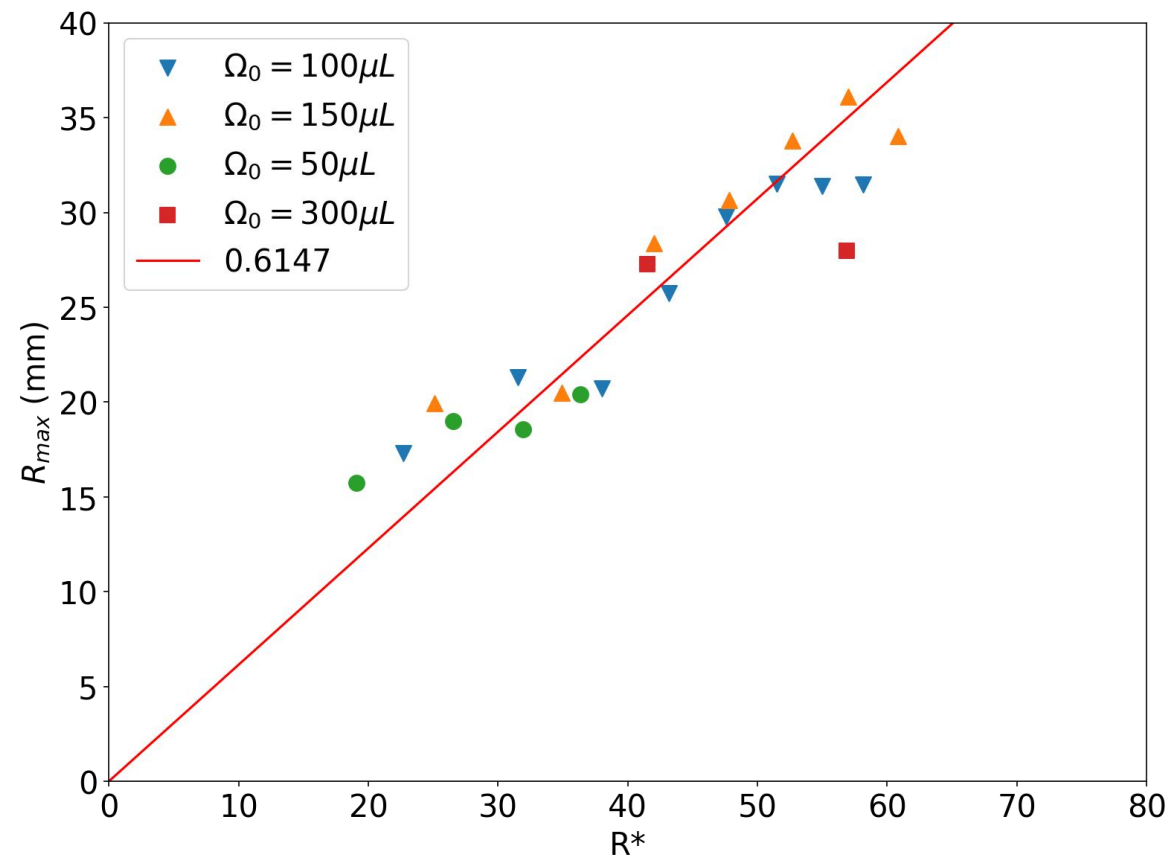
Mérések



# Mérések: belső csepp max. sugara

- Jól egyezik a modellel

- $R_{max} \sim \underbrace{\left( \frac{(\phi_0 - \phi_c) \Delta \gamma H \Omega_0}{(1 - \phi_c) \eta_o j_v} \right)^{\frac{1}{4}}}_{R^*}$



Elméleti megalapozás

Gyakorlati megvalósítás

Mérések

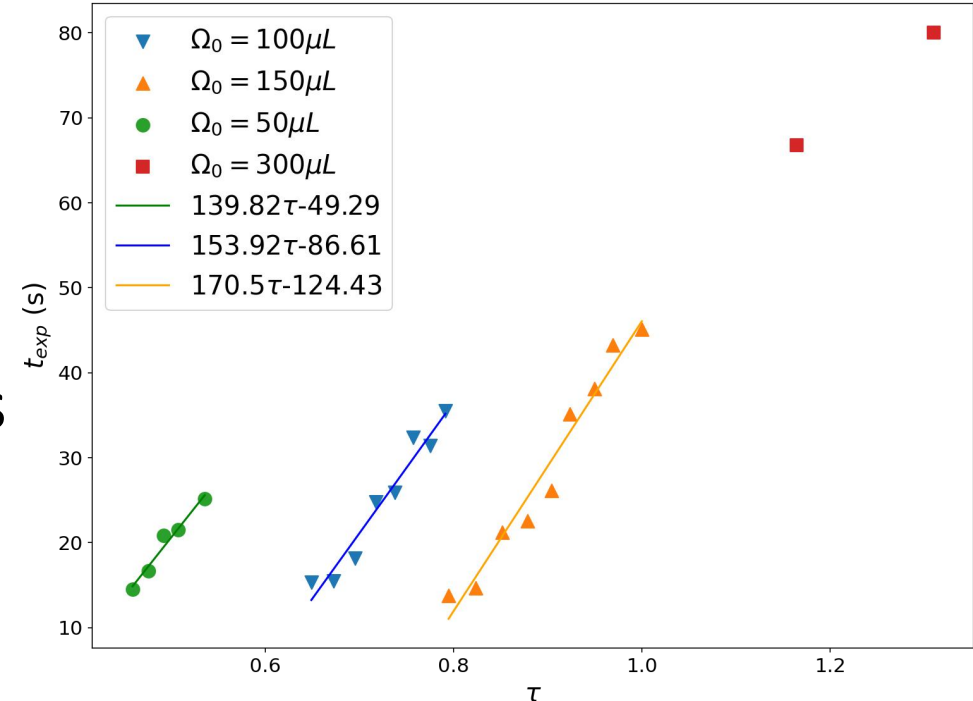
# Mérések: karakterisztikus idő

- Elmélet  $\tau$ -ra is kifejezhető:

$$\tau \sim \left( \frac{(\phi_0 - \phi_c)\eta_o\Omega_0}{(1 - \phi_c)\Delta\gamma H j_v} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

- Meredekségek közel azonosak: modell helyes
- Különböző zérushelyek: térfogattól függ

Tranziens jelenség, térfogattól függ



Elméleti megalapozás

Gyakorlati megvalósítás

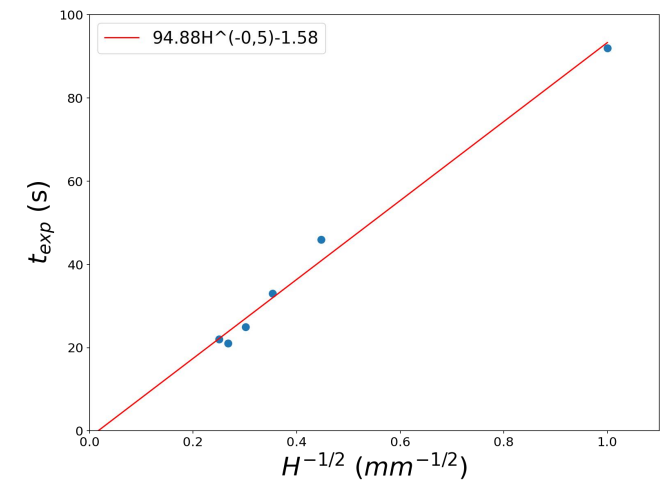
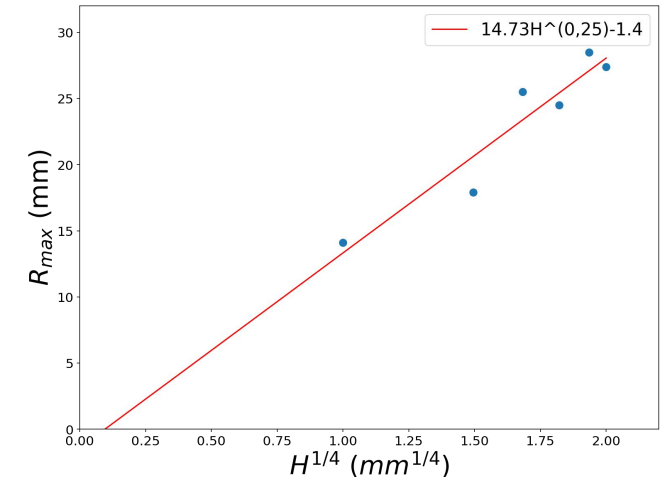
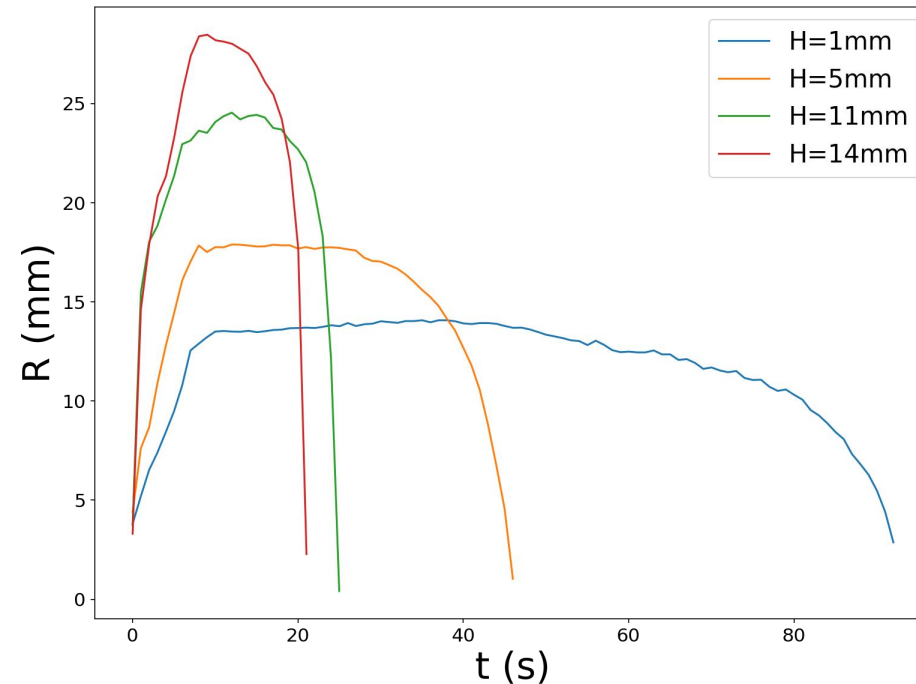
Mérések

# Mérések: olaj mélysége

- $R_{max} \sim \left( \frac{(\phi_0 - \phi_c) \Delta \gamma H \Omega_0}{(1 - \phi_c) \eta_o j_v} \right)^{\frac{1}{4}}$
- $\tau \sim \left( \frac{(\phi_0 - \phi_c) \eta_o \Omega_0}{(1 - \phi_c) \Delta \gamma H j_v} \right)^{\frac{1}{2}}$

Csak amíg  
 $\frac{H^2}{25,0\nu} \ll t_{exp}$

$(\delta(t) \approx 5,0\sqrt{\nu t})$



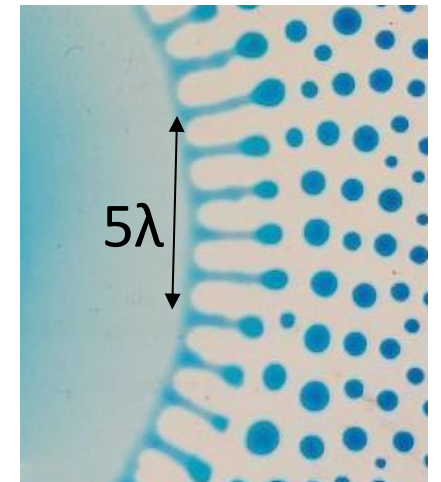
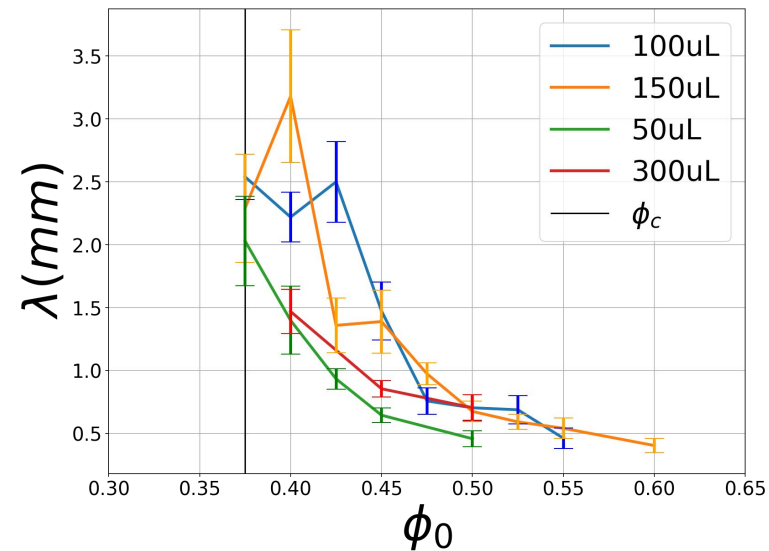
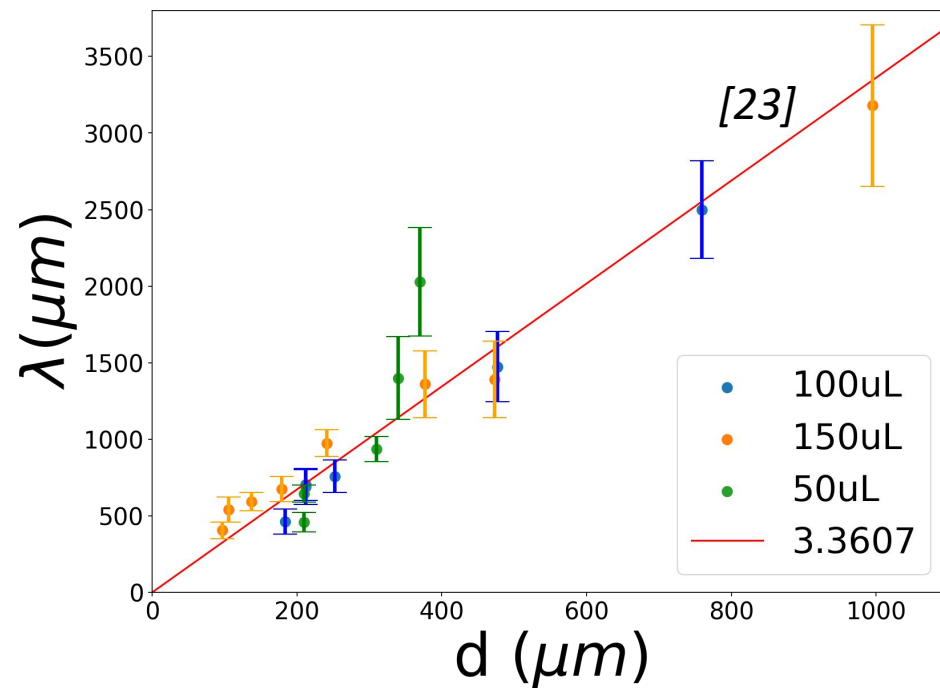
Elméleti megalapozás

Gyakorlati megvalósítás

Mérések

# Mérések: instabilitás hullámhossza

- $\phi_0$  nő,  $\lambda$  csökken
- Plateau-Rayleigh:  $\lambda = 9,01d$



Elméleti megalapozás

Gyakorlati megvalósítás

Mérések

# Mérések: instabilitás hullámhossza (becslés)

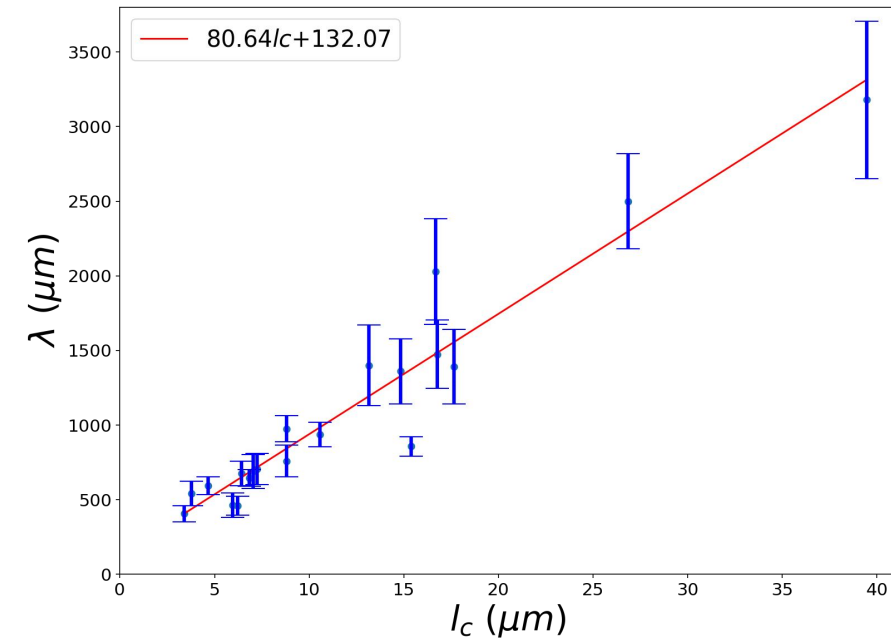
- Dawn, Troian [20]:

$$\lambda \sim l_c = h_{min} (3Ca)^{-\frac{1}{3}} = h_{min} \left( 3 \frac{\eta_{kev} \Delta \gamma H}{\eta_{olaj} R_{max} \gamma_c} \right)^{-\frac{1}{3}} \quad (9)$$

Viszkózus erők/kapilláris erők

$$\frac{\eta V}{\gamma}$$

$h_{min}$ : Keiser interferometriával [9]



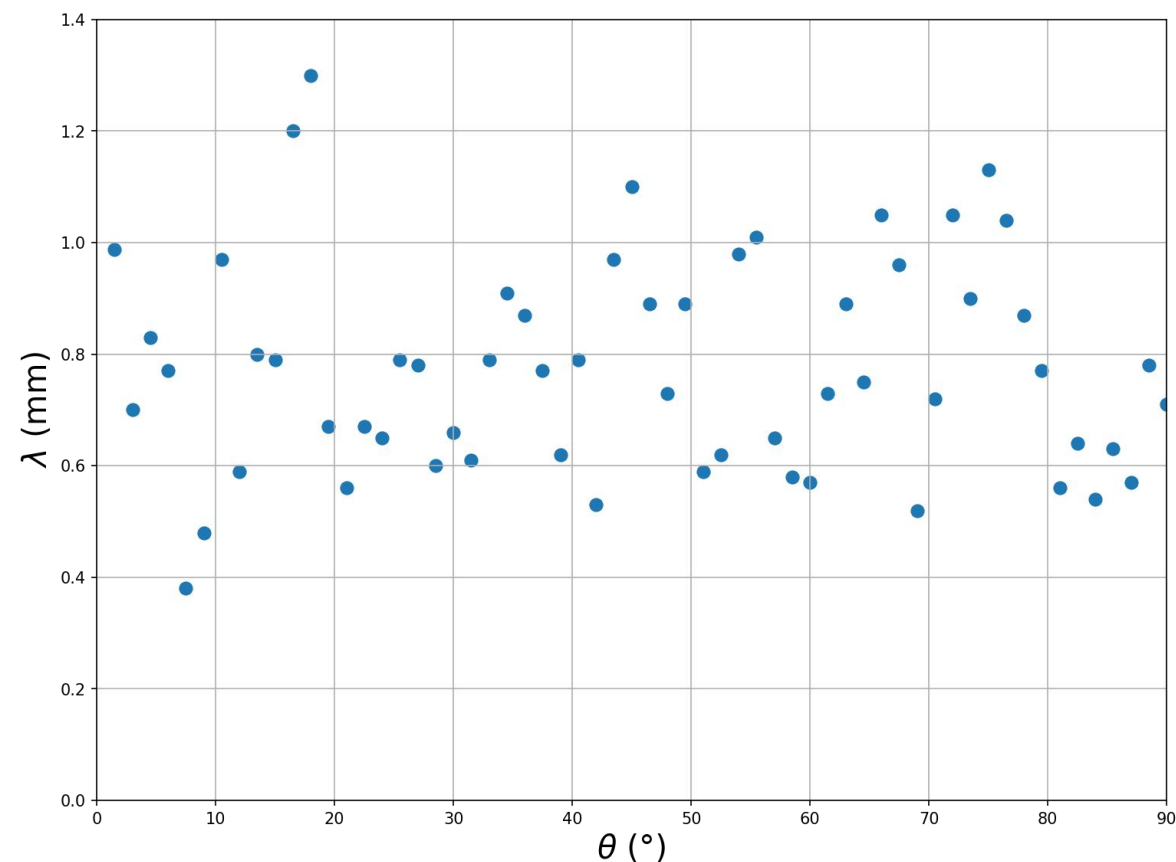
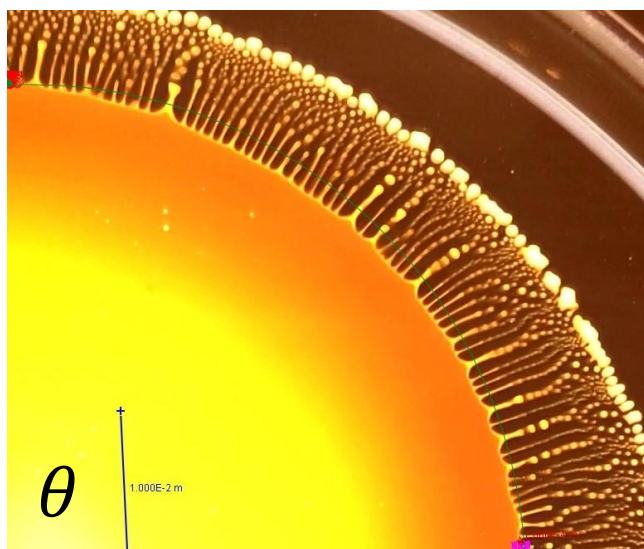
Elméleti megalapozás

Gyakorlati megvalósítás

Mérések

# Mérések: instabilitás hullámhossza

- Nagy szórás



Elméleti megalapozás

Gyakorlati megvalósítás

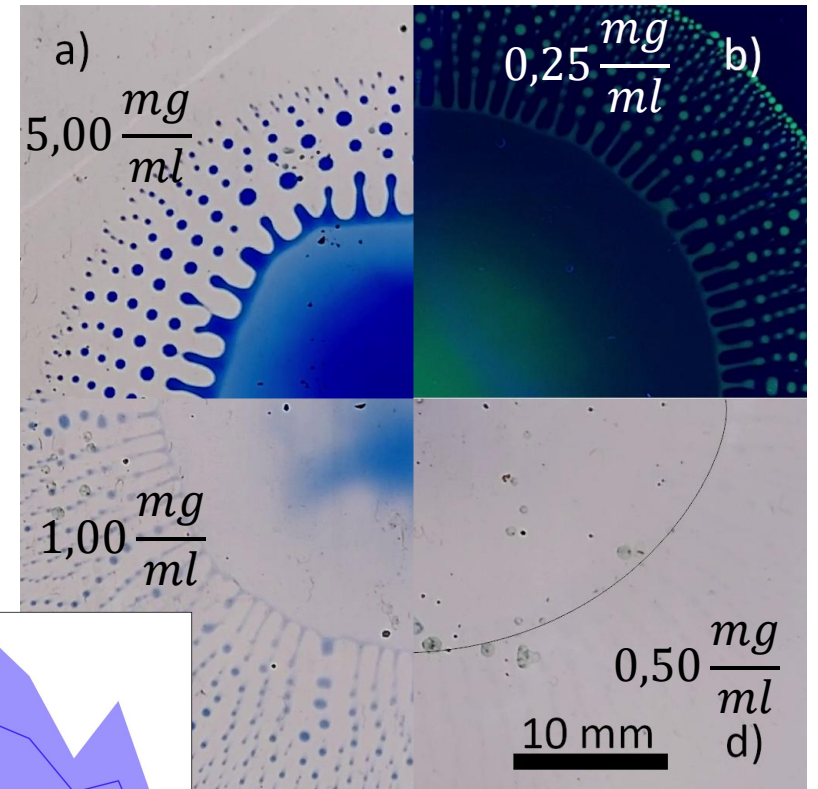
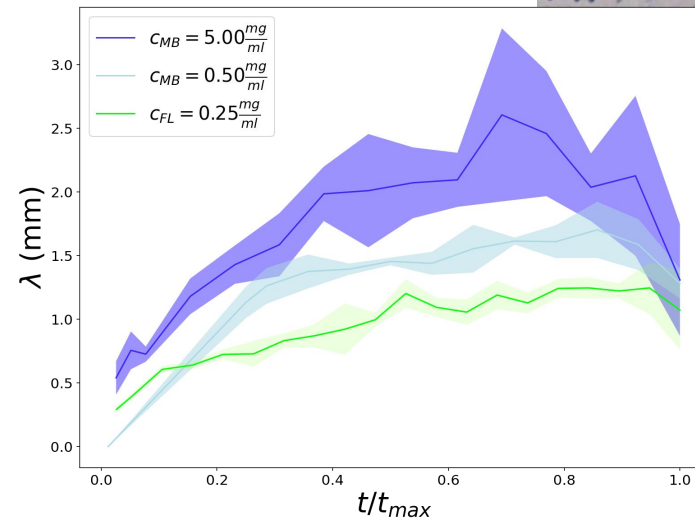
Mérések

# Mérések: színezék hatása

$c_{metilkék} \uparrow \Rightarrow \lambda \uparrow$   
 $\lambda$  szórása  $\uparrow$   
*szabálytalan alak*

Fluoreszcein:

- Saját fény  $\rightarrow$  kevesebb elég



Elméleti megalapozás

Gyakorlati megvalósítás

Mérések



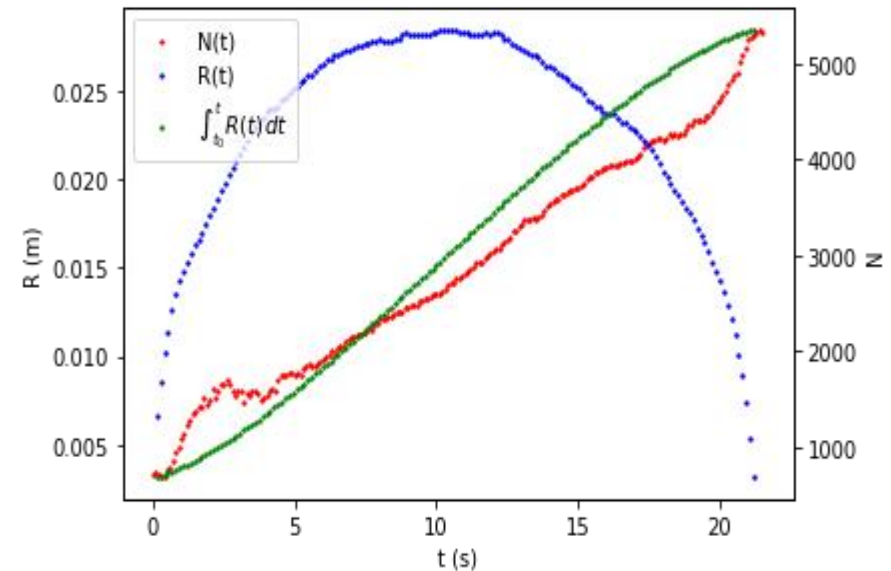
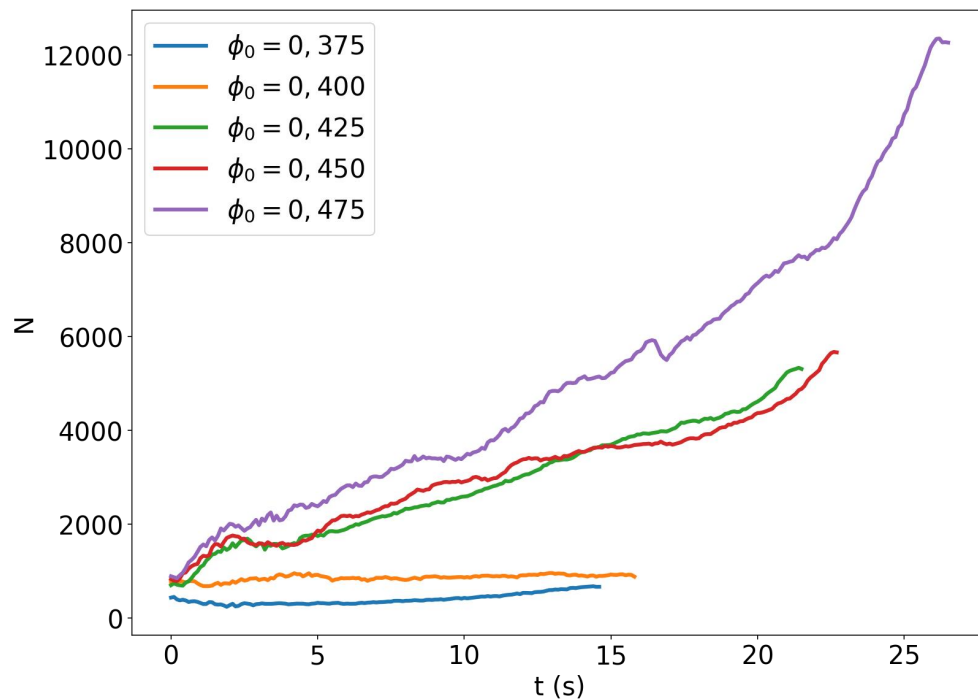
# Mérések: Cseppek száma (becslés)

- Általánosságban:  $N(t) = 2\pi \int_{t_0}^t \frac{R(t)}{\lambda(t)} f(t) dt$  (10)

$nagyobb \phi_0, \Omega_0$ 

- $nagyobb R$
- $nagyobb t$
- $kisebb \lambda$

 }  $nagyobb N_{max}$



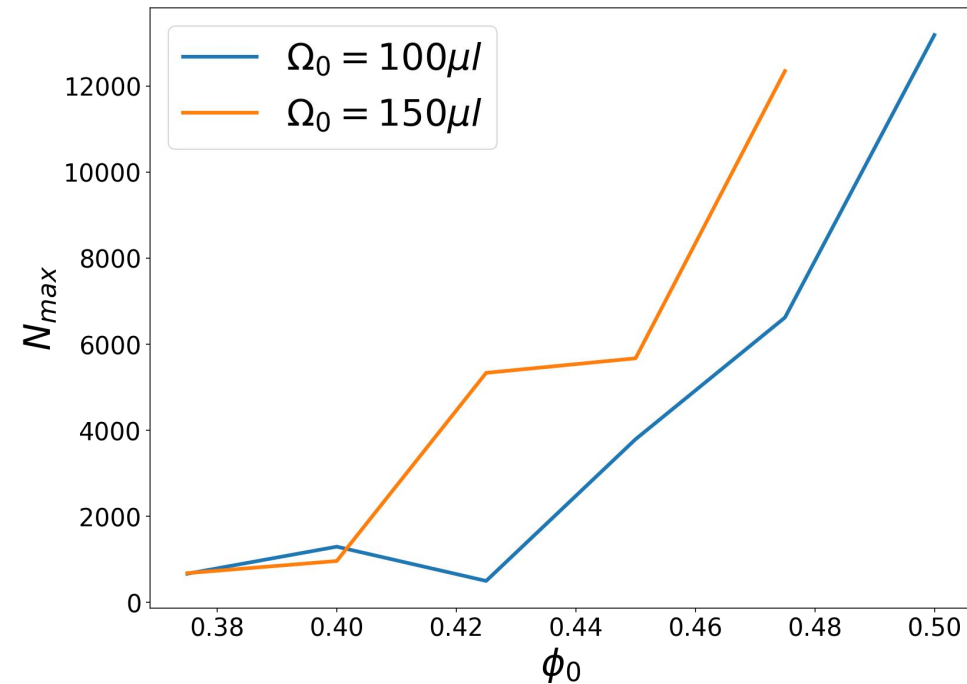
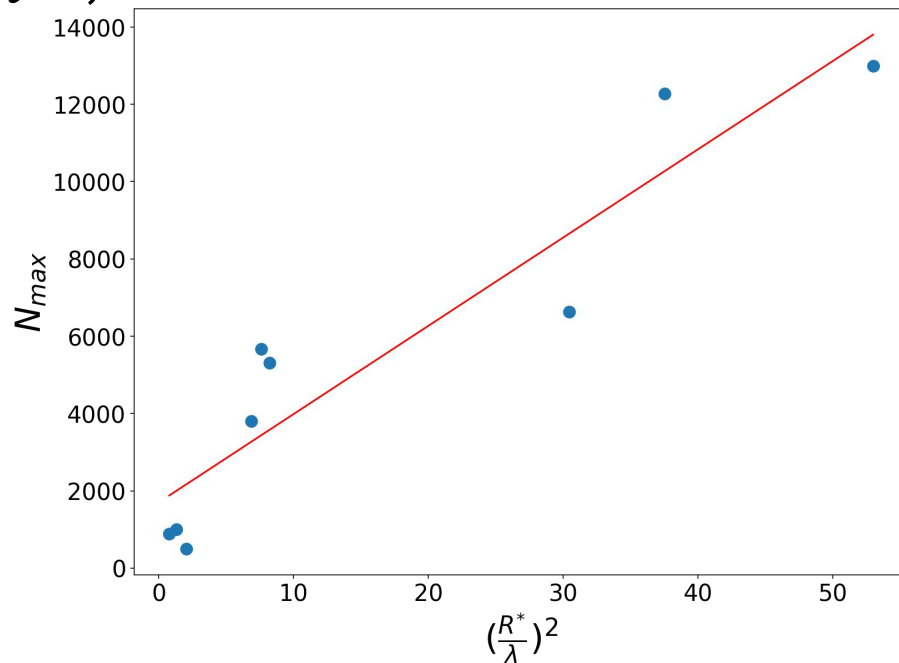
Elméleti megalapozás

Gyakorlati megvalósítás

Mérések

# Mérések: Cseppek száma

$$N_{max} \sim \left( \frac{R_{max}}{\lambda} \right)^2 \quad (11)$$



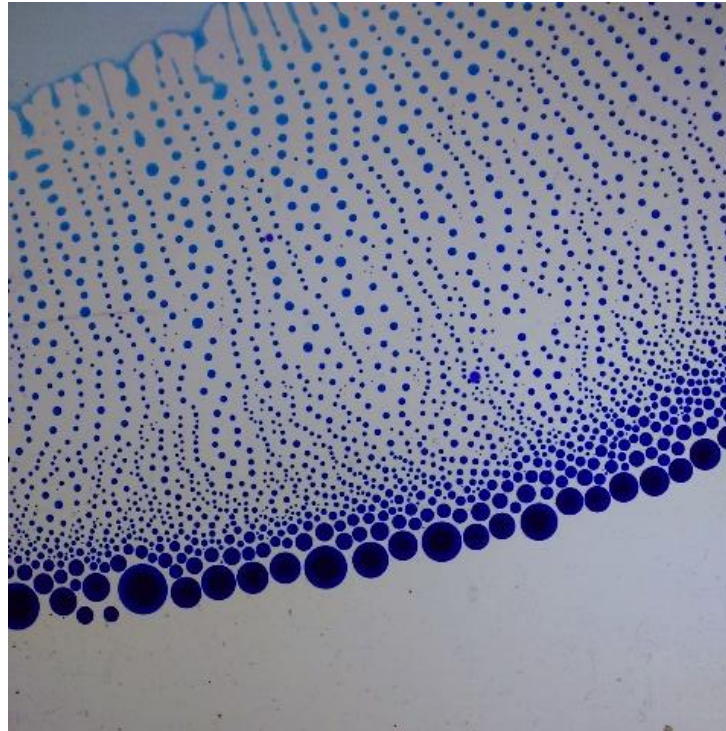
Elméleti megalapozás

Gyakorlati megvalósítás

Mérések

# Mérések: Cseppek száma

- Hibák:
  - Cseppfelismerés
  - Koagulálás



Elméleti megalapozás

Gyakorlati megvalósítás

Mérések

# Összefoglalás

## Elméleti megalapozás: Az alkohol típusa

- $\phi_c$  szénatomszámmal csökken (Traube-szabály)
  - Nagyobb szénatomszámok: nem elegyednek vízzel, kevésbé párolognak
- Párolgási ráta: befolyásolja a jelenség időtartamát
  - Feltételezés: víz párolgása elhanyagolható az alkoholéhoz képest [16; 9]

Felületaktív anyag	$\phi_c$	Gőznyomás (kPa) 20°C-on
Metanol	0,875±0,025	13,02 <sup>[11]</sup>
Etanol	0,6375±0,0225	5,79 <sup>[12]</sup>
1-Propanol	0,375±0,025	1,99 <sup>[13]</sup>
2-Propanol	0,350±0,025	4,4 <sup>[14]</sup>
1-Butanol	-	0,73 <sup>[13]</sup>
Aceton	0,763±0,013	25,54 <sup>[15]</sup>
Víz	-	2,34

I. táblázat. Saját mérések

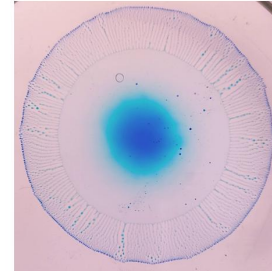
Elméleti megalapozás    Gyakorlati megvalósítás    Mérések

## Felületifeszültség-gradiens

- Csepp vastagsága nem egyenletes
- Párolgás csak a felülettől függ

$\phi$  kijjebb kisebb, beljebb nagyobb

**Felületifeszültség-gradiens**



Elméleti megalapozás    Gyakorlati megvalósítás    Mérések

## Elméleti modell a maximális sugárra

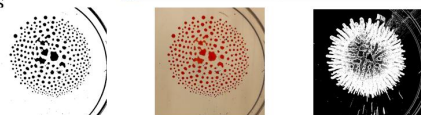
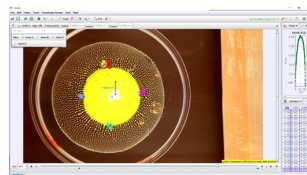
$$(3)(4)(5)(6) \Rightarrow R_{max} \sim \underbrace{\left( \frac{(\phi_0 - \phi_c) \Delta \gamma H \Omega_0}{(1 - \phi_c) \eta_o j_v} \right)^{\frac{1}{4}}}_{R^*} \quad (7)$$

- $\phi_0$  a kezdeti keverék tömegszázalékos koncentrációja
- $\phi_c$  a terüléshez szükséges minimális koncentráció
- $\Delta \gamma = \gamma_c - \gamma_o$
- $H$  az olajkád mélysége
- $\Omega_0$  a cseppentés térfogata
- $\eta_o$  az olaj dinamikai viszkozitása
- $j_v$  az alkohol párolgási fluxusa, tömegre vetített párolgási sebesség és a sűrűségének hányadosa

Elméleti megalapozás    Gyakorlati megvalósítás    Mérések

## Elemzés

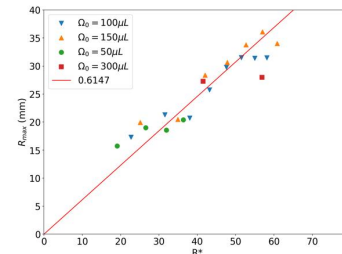
- 4K 30fps videó
- Tracker
  - 4 pontra körillesztés
  - Áramlási sebesség
- Cseppfelismerés
  - Python cv2



Elméleti megalapozás    Gyakorlati megvalósítás    Mérések

## Mérések: belső csepp max. sugara

- Jól egyezik a modellel
- $R_{max} \sim \underbrace{\left( \frac{(\phi_0 - \phi_c) \Delta \gamma H \Omega_0}{(1 - \phi_c) \eta_o j_v} \right)^{\frac{1}{4}}}_{R^*}$

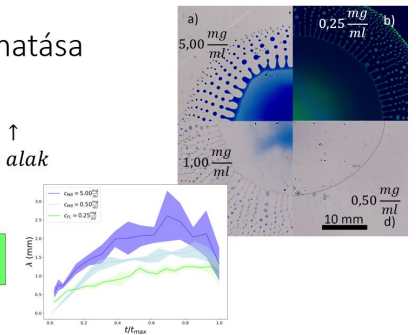


Elméleti megalapozás    Gyakorlati megvalósítás    Mérések

## Mérések: színezék hatása

$c_{metilkék} \uparrow \Rightarrow \lambda \uparrow$   
szórása  $\uparrow$   
szabálytalan alak

**Fluoreszcen:**  
• Saját fény  $\rightarrow$  kevesebb elég



Elméleti megalapozás    Gyakorlati megvalósítás    Mérések



# Hivatkozások, felhasznált irodalom

- [1] Bush, J. W., & Hu, D. L. (2006). WALKING ON WATER: Biocomotion at the Interface. *Annual Review of Fluid Mechanics* Vol 38., 339-369. doi:10.1146/annurev.fluid.38.050304.092157
- [2] Wim Fyen, F. H. (2008). Chapter 19 - A Detailed Study of Semiconductor Wafer Drying. William Andrew Publishing, (old.: 795-854.). doi:10.1016/B978-0-323-29960-2.00019-8.
- [3] Roché, M., Li, Z., Griffiths, I. M., Le Roux, S., Cantat, I., Saint-Jalmes, A., & Stone, H. A. (2014). Marangoni Flow of Soluble Amphiphiles. *Physical Review Letters* 112., 20-23. doi:10.1103/PhysRevLett.112.208302
- [4] Wodlei, F., Sebilleau, J., Magnaudet, J., & Pimienta, V. (2018). Marangoni-driven flower-like patterning of an evaporating drop spreading on a liquid substrate. *Nature Communications* 9., 820. doi:10.1038/s41467-018-03201-3
- [5] Kim, H., Muller, K., & Shardt, O. (2017). Solutal Marangoni flows of miscible liquids drive transport without surface contamination. *Nature Physics* 13., 1105-1110. doi:10.1038/nphys4214
- [6] Sanatkar, N., Kulichikhin, V. G., Malkin, A. Y., & Foudazi, R. (2018). Spreading of Oil-in-Water Emulsions on Water Surface. *Langmuir* 34, 37, 10974-10983. doi:10.1021/acs.langmuir.8b01435
- [7] Thomson, J. (1855). On certain curious Motions observable at the Surfaces of Wine and other Alcoholic Liquors. *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science.*, 330-333.
- [8] Fournier, J., & Cazabat, A. (1992). Tears of Wine. *Europhysics Letters* 20., 517-522.
- [9] Keiser, L., Bense, H., Colinet, P., Bico, J., & Reyssat, E. (2017). Marangoni Bursting: Evaporation-Induced Emulsification of Binary Mixtures on a Liquid Layer. *Physical Review Letters* Vol. 118., 7-17. doi:10.1103/PhysRevLett.118.074504
- [10] Hasegawa, K., & Manzaki, Y. (2021). Marangoni fireworks: Atomization dynamics of binary droplets on an oil pool. *Physics of Fluids* 33. doi:10.1063/5.0041346
- [11] Gibbard H.F.; Creek J.L.: Vapor pressure of Methanol from 288.15 to 337.65 K. *J.Chem.Eng.Data* 19 (1974) 308-310
- [12] Kahlbaum G.W.A.; von Wirkner C.G.: 1.Hälfte (Vol. 2a). Monograph (1897) 1-222 (Dortmund Data Bank)
- [13] Kempe, Herbert P.; Krens, Saul L.: Vapor pressure of primary n-alkyl chlorides and alcohols. *J. Chem. Eng. Data*, 1969, 14, 1, 98-102

# Hivatkozások, felhasznált irodalom

- [16] O'Hare, K.; Spedding, P.; Grimshaw, J.: Evaporation of the Ethanol and Water Components Comprising a Binary Liquid Mixture. 118-128. 2008/05/15 Developments in Chemical Engineering and Mineral Processing
- [17] Schlichting, Hermann (1979), Boundary-Layer Theory, 7th ed., McGraw Hill, New York, U.S.A. 160. oldal
- [18] R. Shankar Subramanian: Boundary Conditions in Fluid Mechanics, Department of Chemical and Biomolecular Engineering, Clarkson University, Potsdam, New York 13699
- [19] Hooshanginejad, A.; Jung, S. Buoyancy-Marangoni Fingering of a Miscible Spreading Drop. *Symmetry* 2022, 14, 425. <https://doi.org/10.3390/sym14020425>
- [20] Dawn E. Kataoka, Sandra M. Troian, A Theoretical Study of Instabilities at the Advancing Front of Thermally Driven Coating Films, *Journal of Colloid and Interface Science*, Volume 192, Issue 2, 1997, p. 350-362, ISSN 0021-9797, <https://doi.org/10.1006/jcis.1997.5018>.
- [21] Pierre-Gilles Gennes, Françoise Brochard-Wyart, David Quéré: *Capillarity and Wetting Phenomena*, 271-275., Springer New York, NY, 2003.
- [22] [http://hypt.elte.hu/wp-content/uploads/2022/09/Problemak\\_magyar\\_2022.pdf](http://hypt.elte.hu/wp-content/uploads/2022/09/Problemak_magyar_2022.pdf)
- [23] Zhao, C., Sprittles, J., & Lockerby, D. (2019). Revisiting the Rayleigh–Plateau instability for the nanoscale. *Journal of Fluid Mechanics*, 861, R3. doi:10.1017/jfm.2018.950
- [24] Seyfert, C; Marin, Alvaro: Influence of added dye on Marangoni-driven droplet instability. *Phys. Rev. Fluids* Vol. 7; issue 4; 2022. doi: 10.1103/PhysRevFluids.7.043602
- [25] H. Ghahremani, A. Moradi, J. Abedini-Torghabeh, S.M. Hassani: Measuring surface tension of binary mixtures of water + alcohols from the diffraction pattern of surface ripples. *Pelagia Research Library, Der Chemica Sinica*, 2011, 2(6):212-221
- [26] Pang, Fong-Meng; Seng, Chye-Eng; Teng, T.T; Ibrahim, M.: Densities and viscosities of aqueous solutions of 1-propanol and 2-propanol at temperatures from 293.15 K to 333.15 K. *Journal of Molecular Liquids*, Volume 136 p. 71-78. 2007.
- [27] Dongdong Liu and Tuan Tran: Vapor-Induced Attraction of Floating Droplets. *The Journal of Physical Chemistry Letters* 2018 9 (16), 4771-4775.

# Boycott-effektus vizsgálata

Gombási Róbert

*BME - mechatronika szakos hallgató*

*Eötvös József Gimnázium és Kollégium, Tata - egykori diák*

mentor: dr. Szeidemann Ákos



Ha folyadékokba nagyobb sűrűségű részecskéket helyezünk, akkor a részecskék az edény aljára merülnek. Az ülepedés sebességét jelentősen befolyásolni lehet a tartály paramétereivel és megdöntésével.



0.67-szeres lassítás

00:00.00

00:00.00

## 1. Fizikai háttér

## 2. Az ülepedés fizikája

- Erők
- Egyensúlyi sebesség
- Elmélet megdöntött edényre
- Az ülepedési idő

## 3. A kísérleti eszközök és módszerek

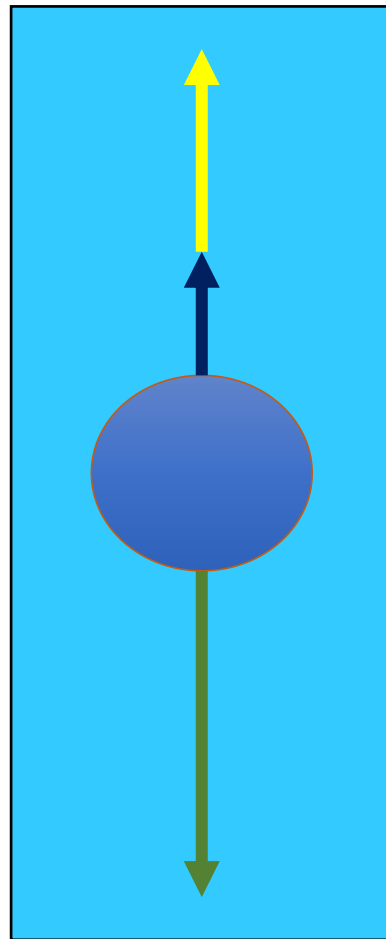
## 4. Vizsgált paraméterek

## 5. Eredmények

- A megdöntés szöge
- Az edény paraméterei
- A folyadék és a részecskék tulajdonságai

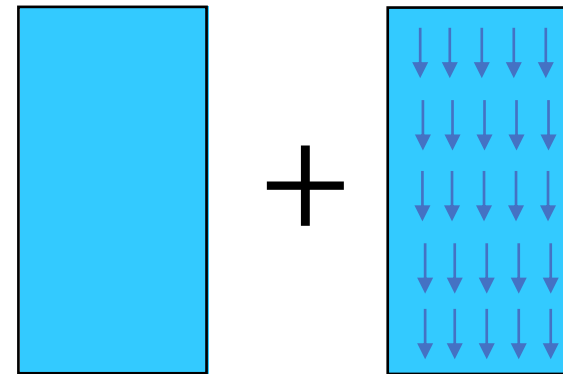
## 6. Gyakorlati felhasználás

## Egyensúlyi sebesség

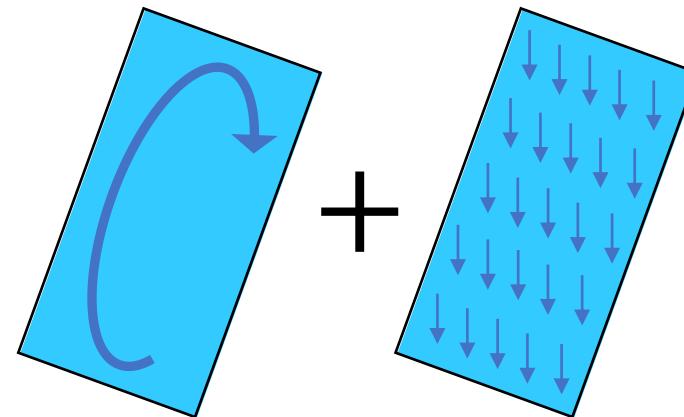


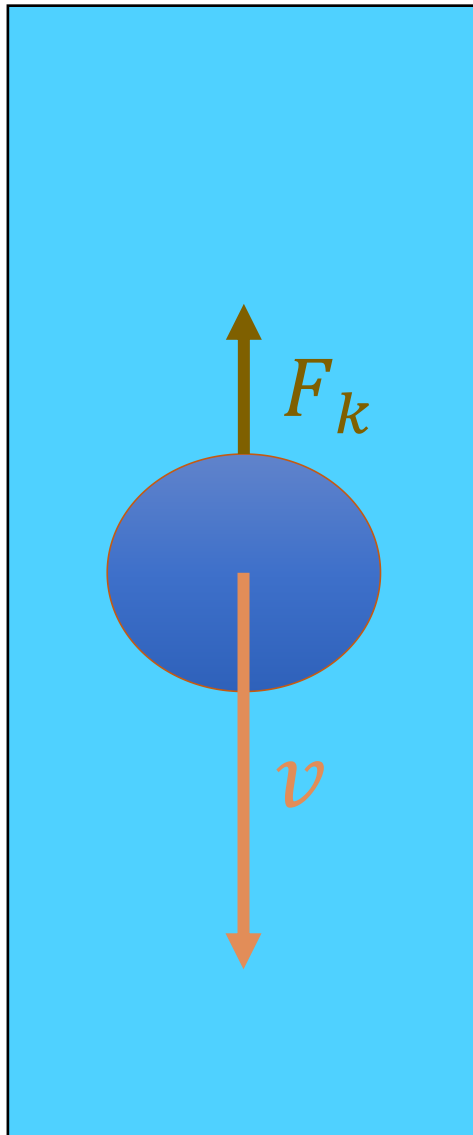
## Ülepedési áramlás

„Egyenes” ülepedés



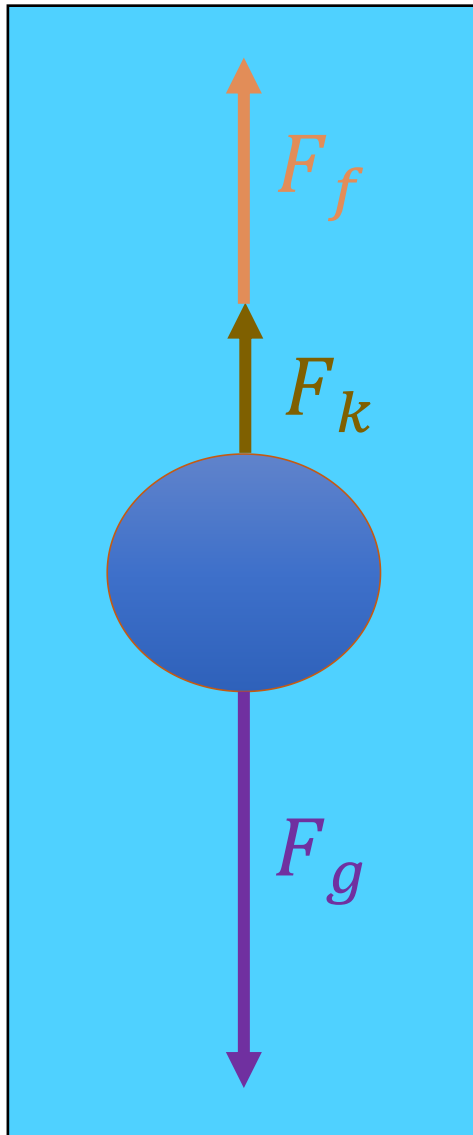
„döntött” ülepedés





$$F_k = bv$$

$$b = 6\pi\eta r$$



Közegellenállás

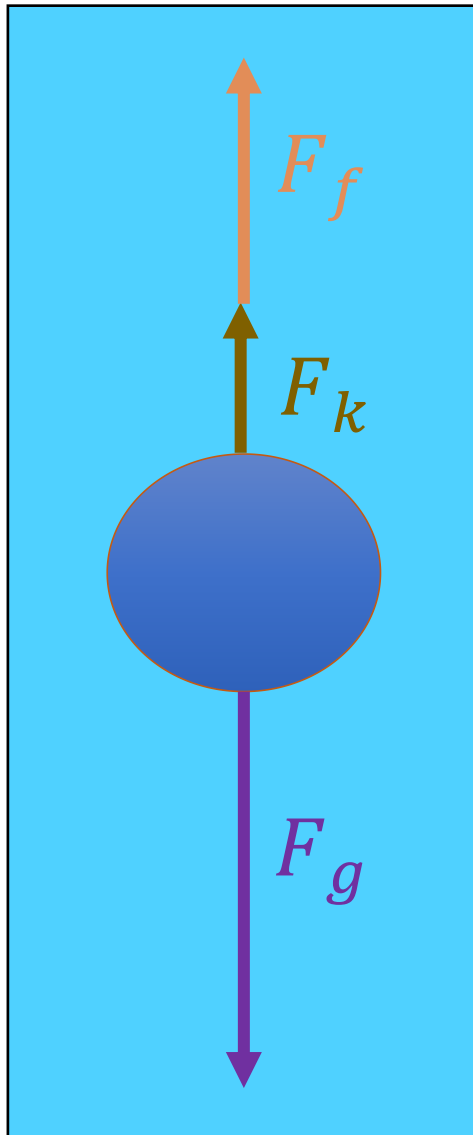
$$F_k = bv \qquad b = 6\pi\eta r$$

Felhajtóerő

$$F_f = \rho_l V g$$

Gravitációs erő

$$F_g = \rho_p V g$$



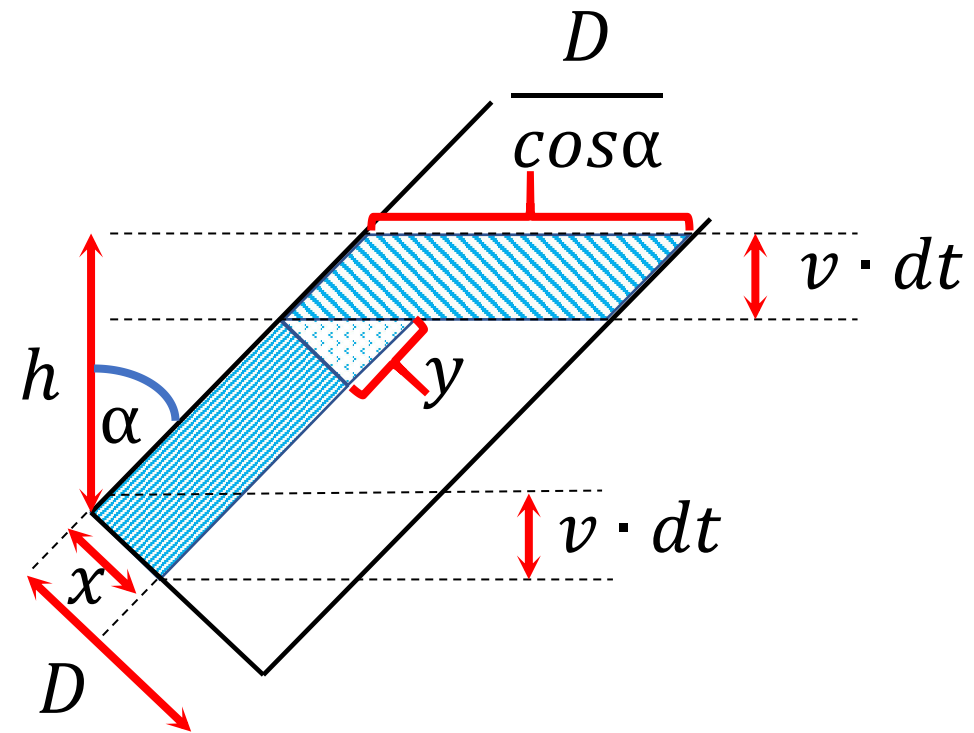
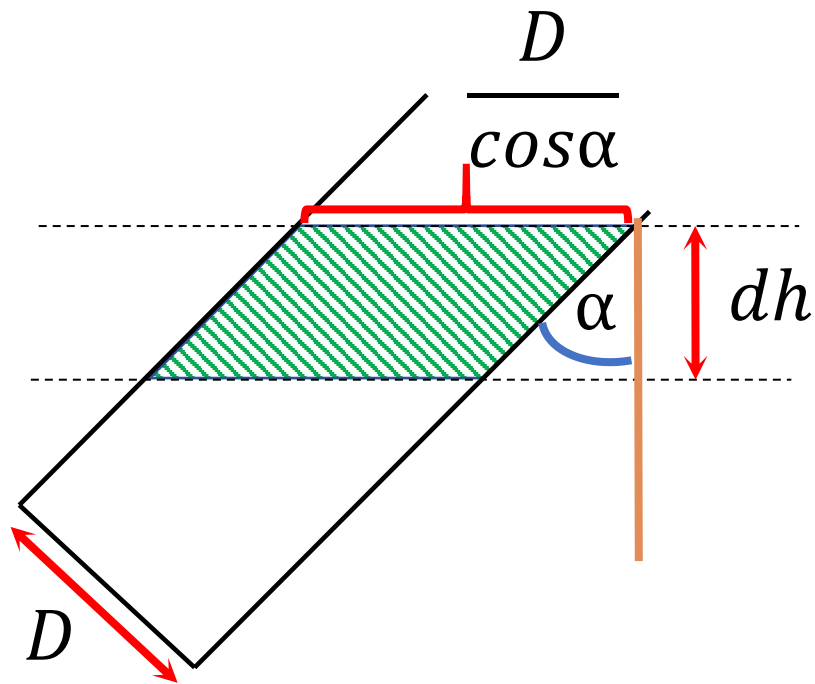
$$F_g = F_f + F_k$$

$$v_e = \frac{2r^2 g (\rho_p - \rho_l)}{9\eta}$$

$r$  = a részecske sugara

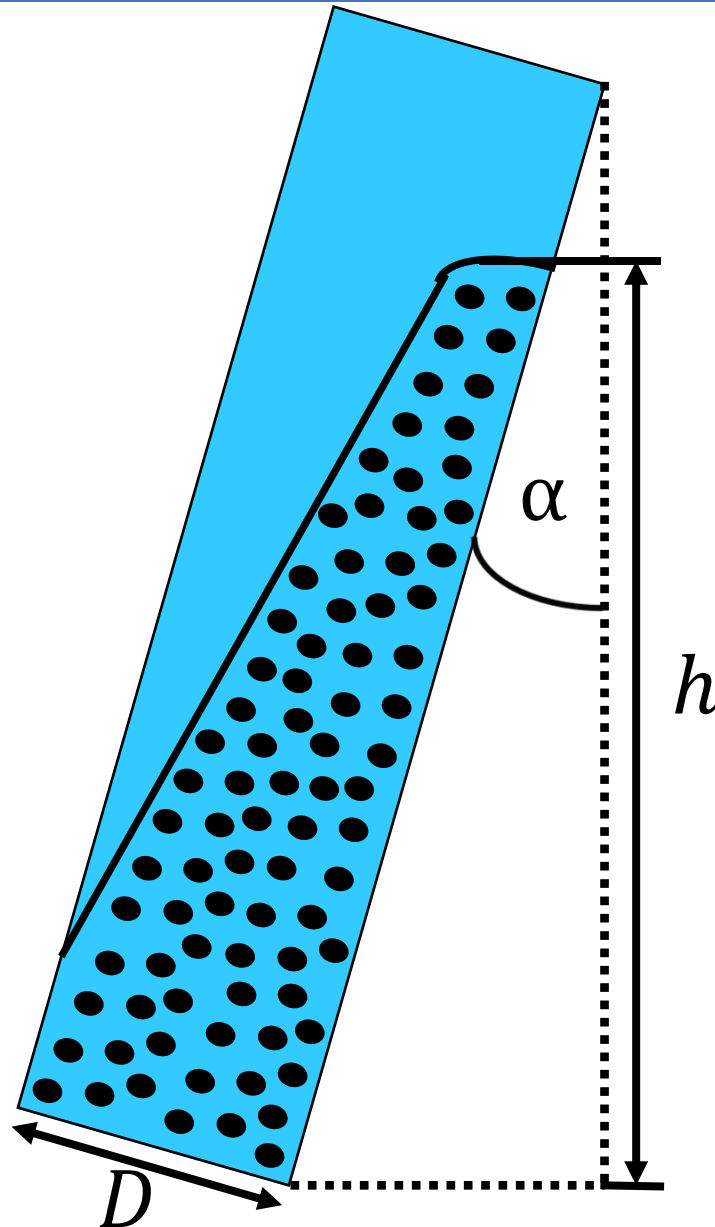
$\eta$  = dinamikai viszkozitás

$\rho_p - \rho_l$  = a sűrűség különbsége a folyadék és a részecskék között



$$dh \cdot \frac{D}{\cos \alpha} = \frac{D}{\cos \alpha} \cdot v \cdot dt + \frac{h - v \cdot dt}{\cos \alpha} \cdot \sin \alpha \cdot v \cdot dt + \frac{\sin^2 \alpha \cdot v^2 \cdot (dt)^2}{2 \operatorname{tg} \alpha}$$





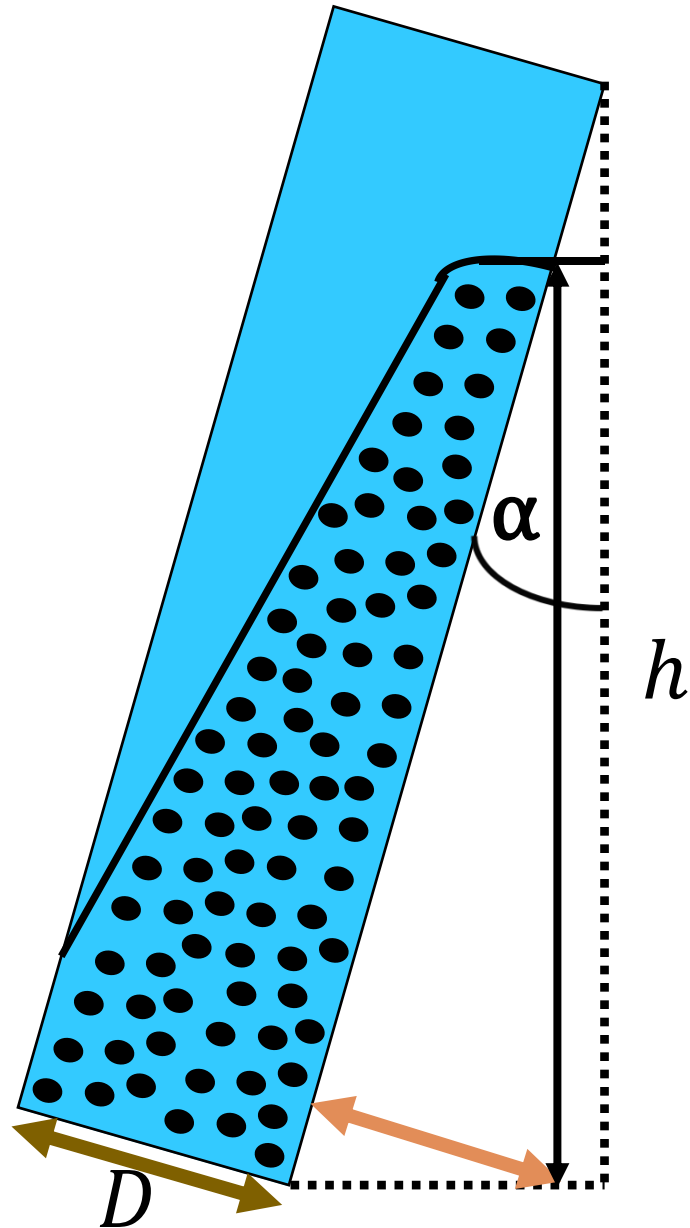
$$\frac{dh}{dt} = -v_e \left( 1 + \frac{h}{D} \sin(\alpha) \right)$$

$t = 0$  amikor  $h = \text{maximum}$

$D = \text{átmérő}$

$h = \text{az ülepedés határvonalának}$   
 $\text{aktuális magassága}$

$\alpha = \text{a döntés szöge}$



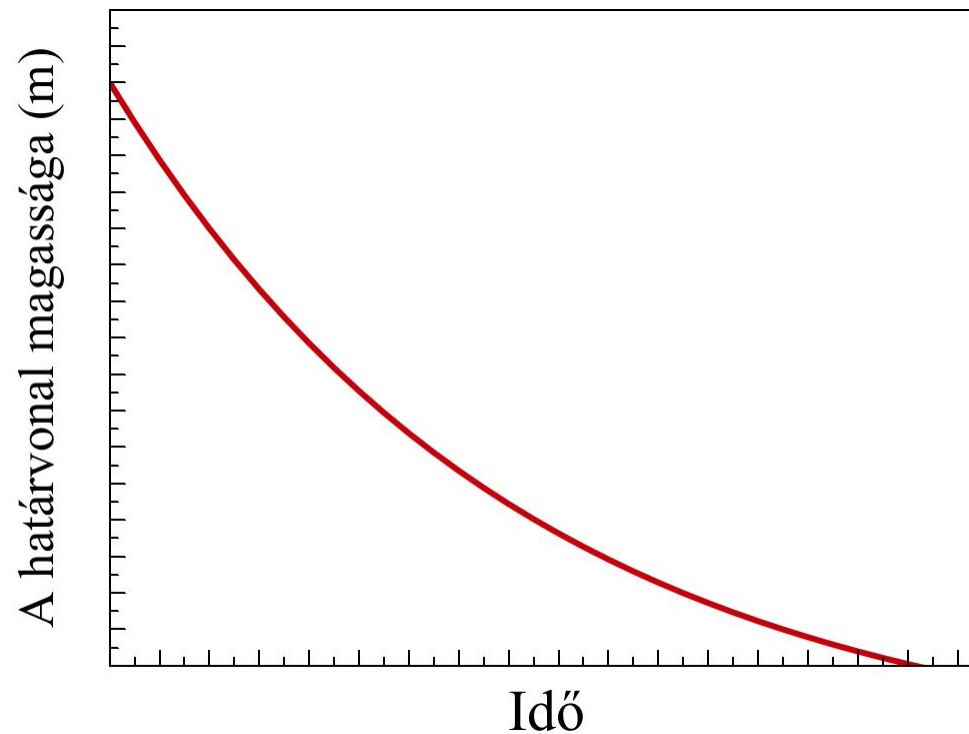
$$\frac{dh}{dt} = -v_e \left( 1 + \frac{h}{D} \sin(\alpha) \right)$$

$$\frac{h \sin(\alpha)}{D}$$

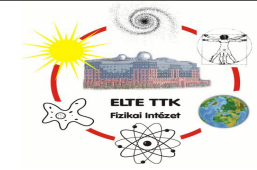
# Összefüggés h és t között

$$\frac{dh}{dt} = -v_e \left( 1 + \frac{h}{D} \sin(\alpha) \right)$$

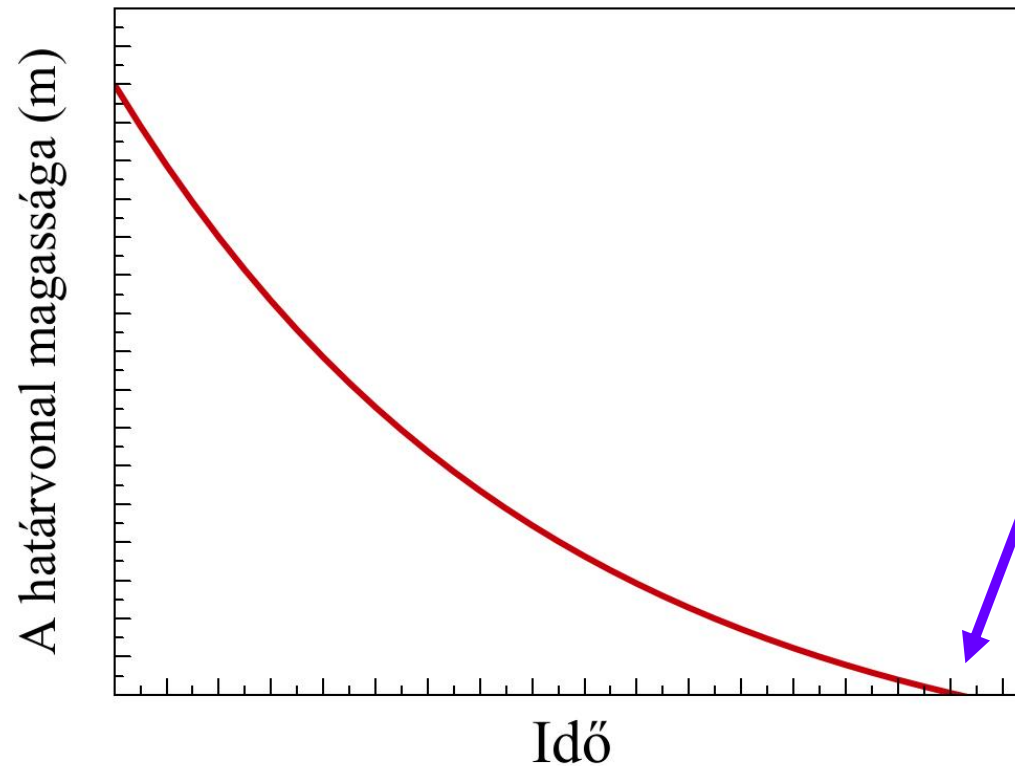
$$h = \frac{(D + h_0 \sin(\alpha)) e^{-\frac{v_e \sin(\alpha) t}{D}} - D}{\sin(\alpha)}$$



# Hogyan írjuk le az ülepedési időt?

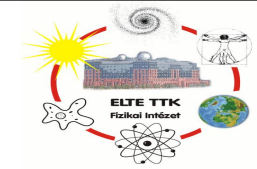


$$h = 0 = \frac{(D + h_0 \sin(\alpha)) e^{-\frac{v_e \sin(\alpha) t_0}{D}}}{\sin(\alpha)} - \frac{D}{\sin(\alpha)}$$



$$t_0 = \frac{D \ln \left( \frac{D + h_0 \sin(\alpha)}{D} \right)}{v_e \sin(\alpha)}$$

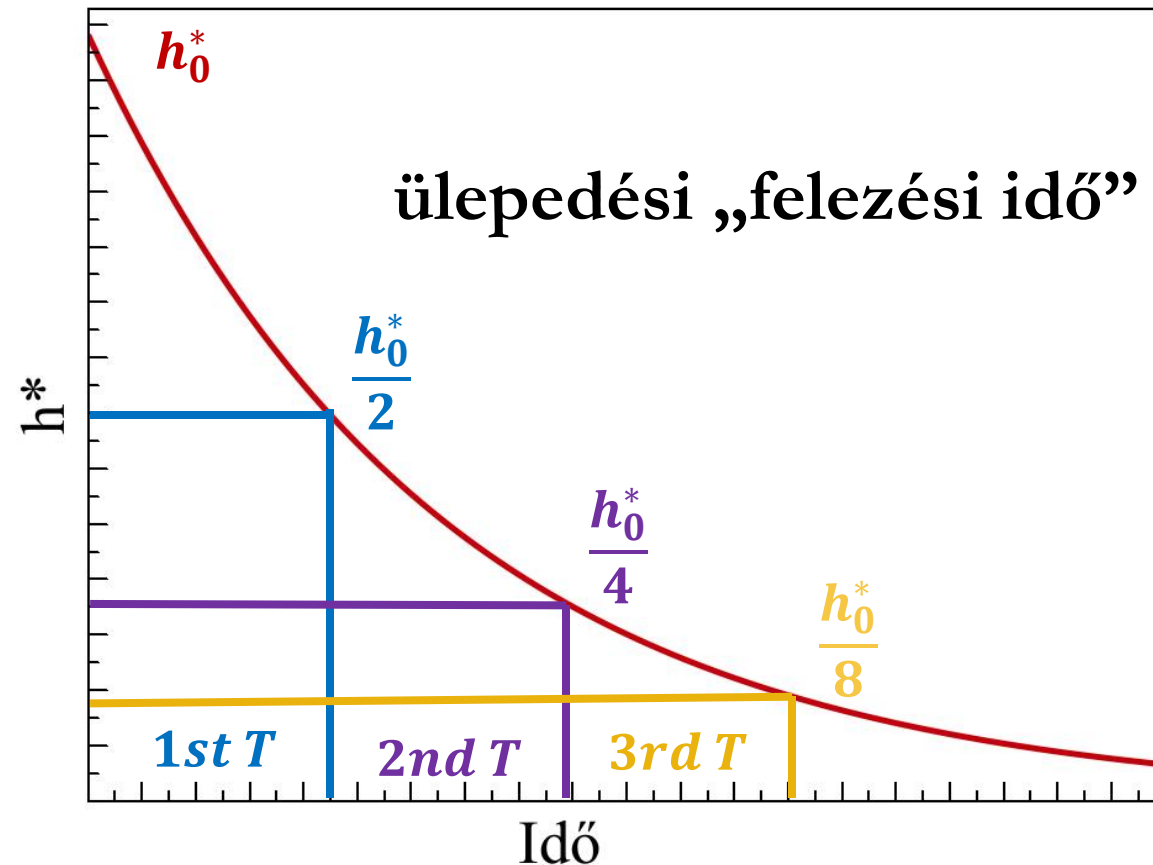
# Hogyan hasonlítsunk össze ülepedéseket?



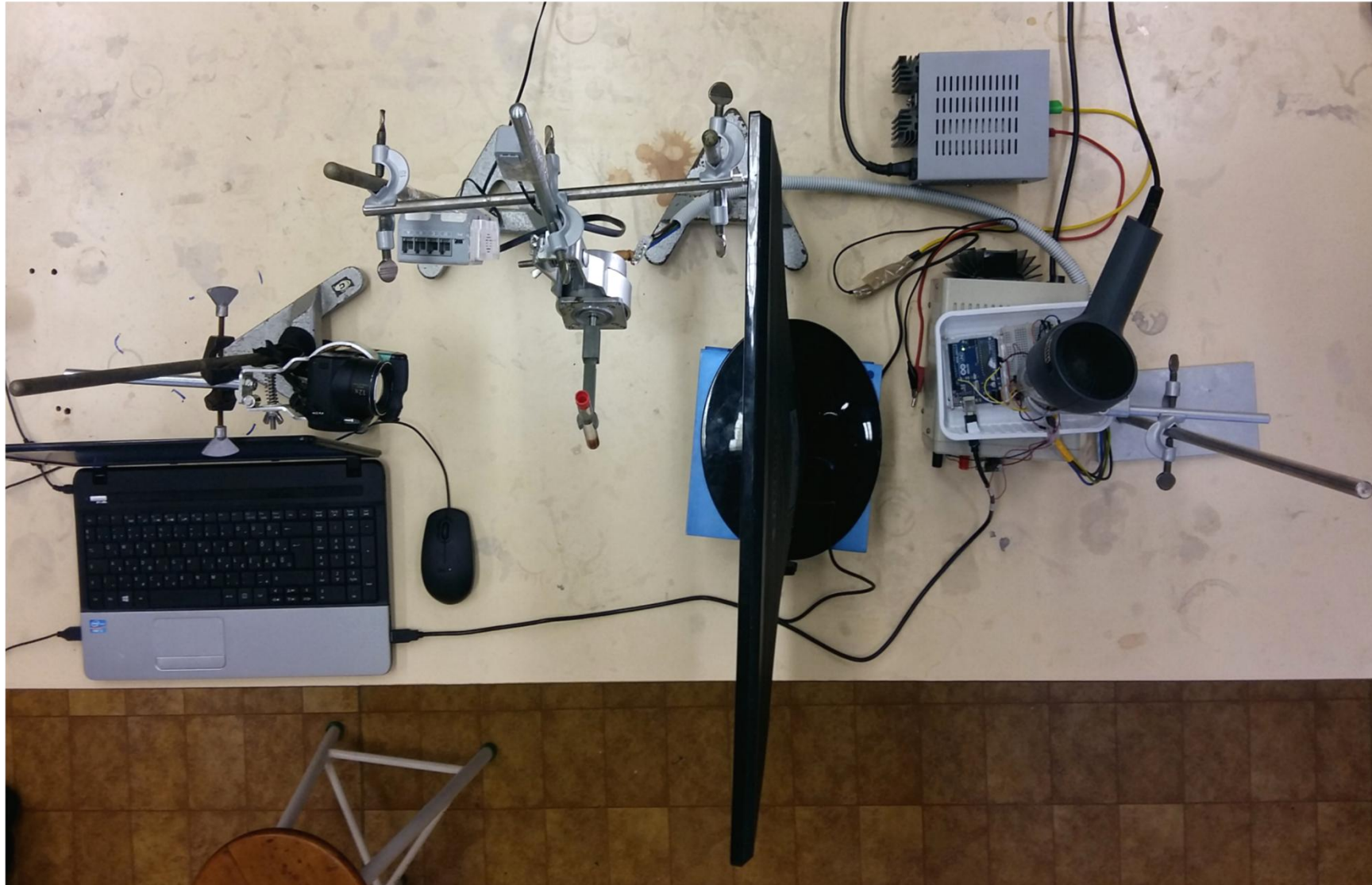
$$D^* = h_0^* \frac{v_e \sin(\alpha) t}{D} \Rightarrow D + h_0^* \sin(\alpha) e^{-\frac{v_e \sin(\alpha) t}{D}} = h_0^* \sin(\alpha) + D$$

$$h^* = h_0^* e^{-\frac{v_e \sin(\alpha) t}{D}} = h_0^* 2^{-\frac{t}{T}}$$

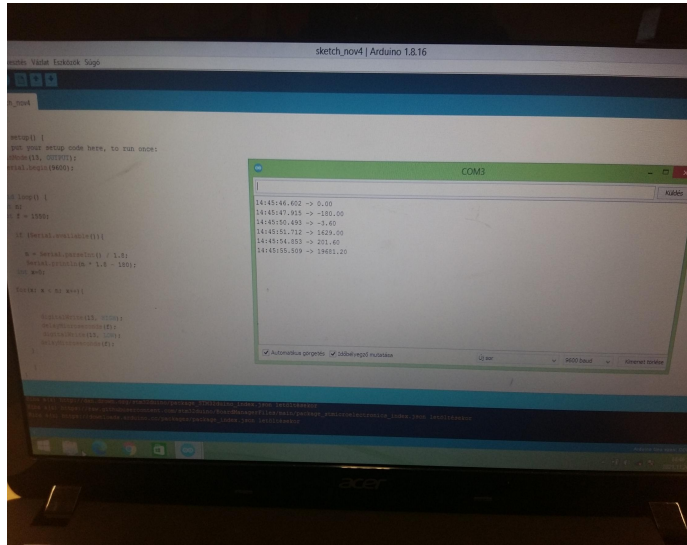
$$T = \frac{D \ln(2)}{v_e \sin(\alpha)}$$



# A kísérleti eszközök (1)

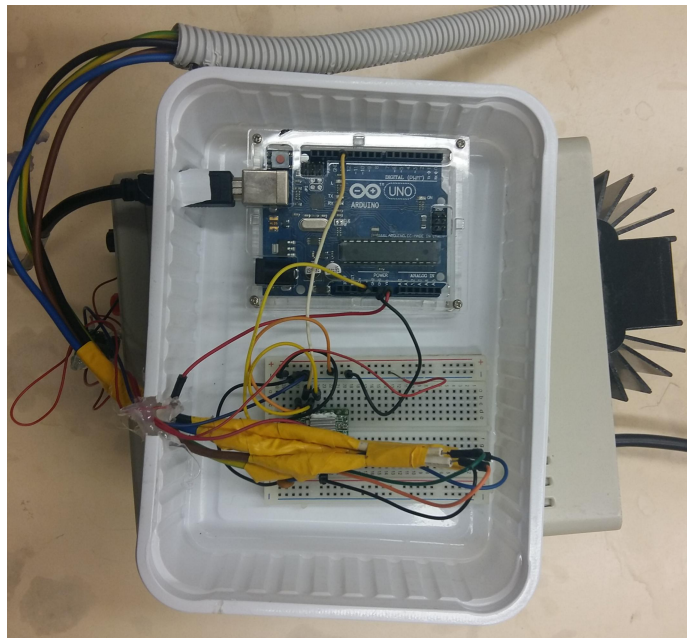






**A mozgórendszer tápegysége**  
Arduino a motor vezérlésére

**A kamerarendszer tápegysége**





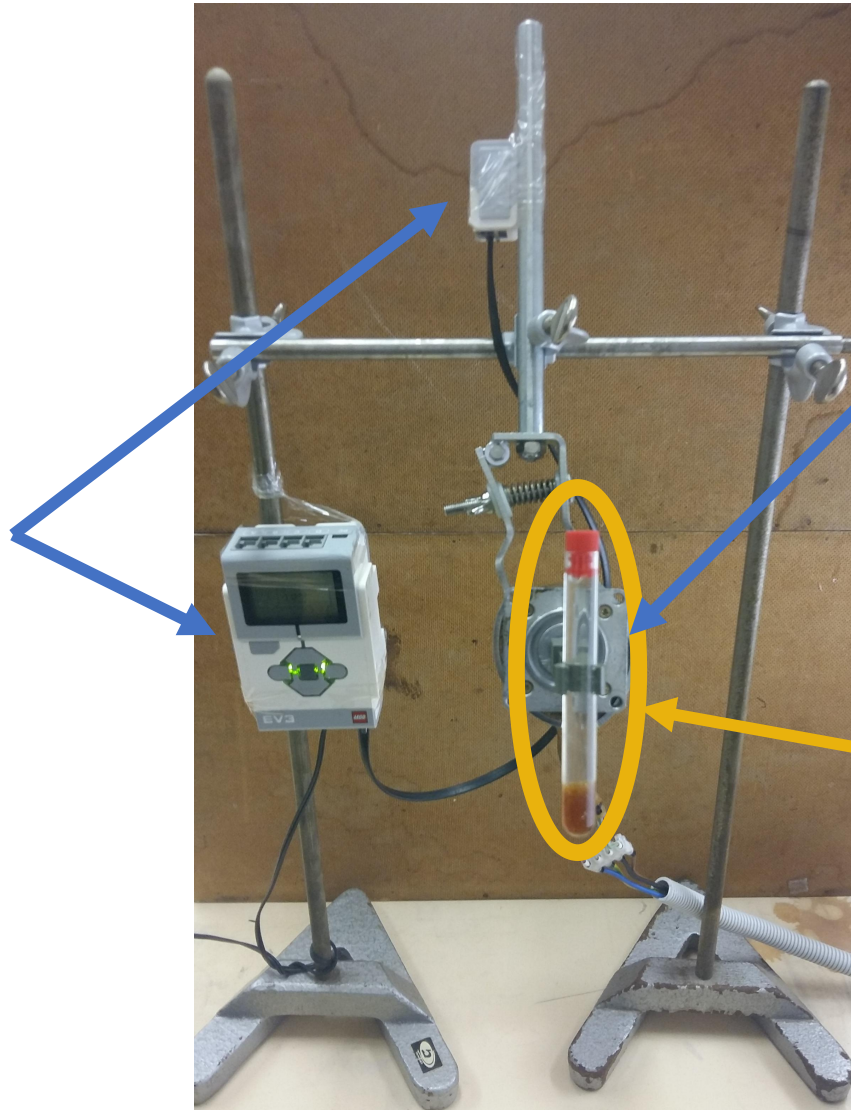
kamera



Speciális háttér



Szögmérő

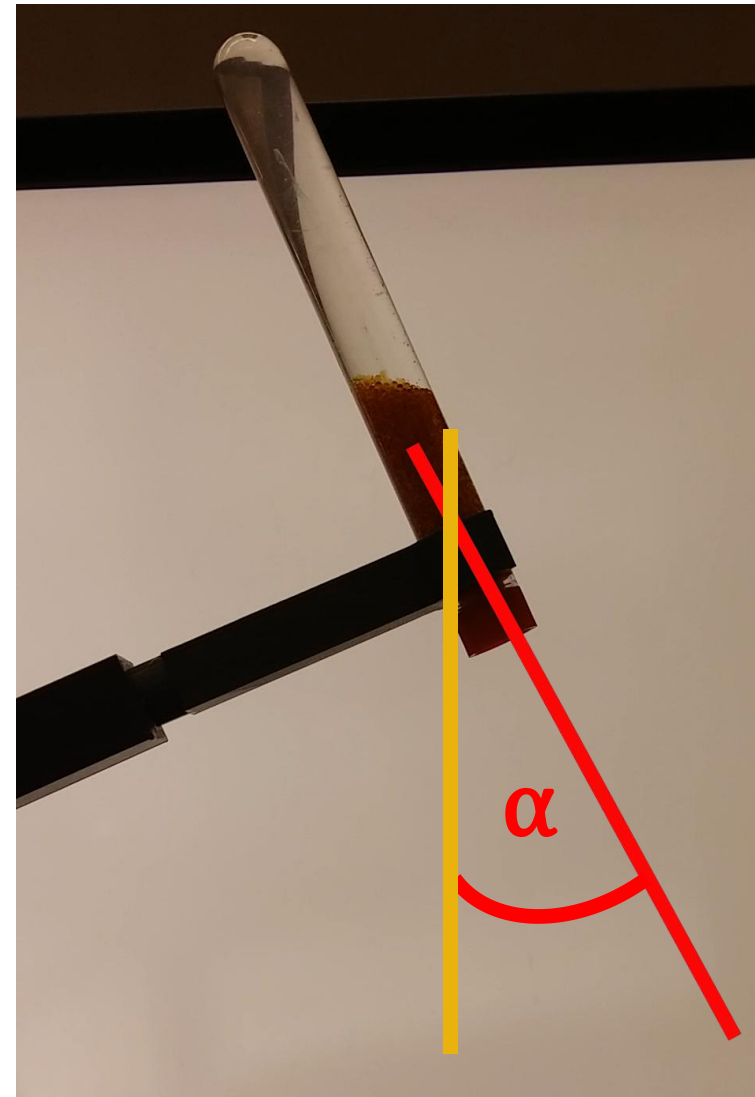
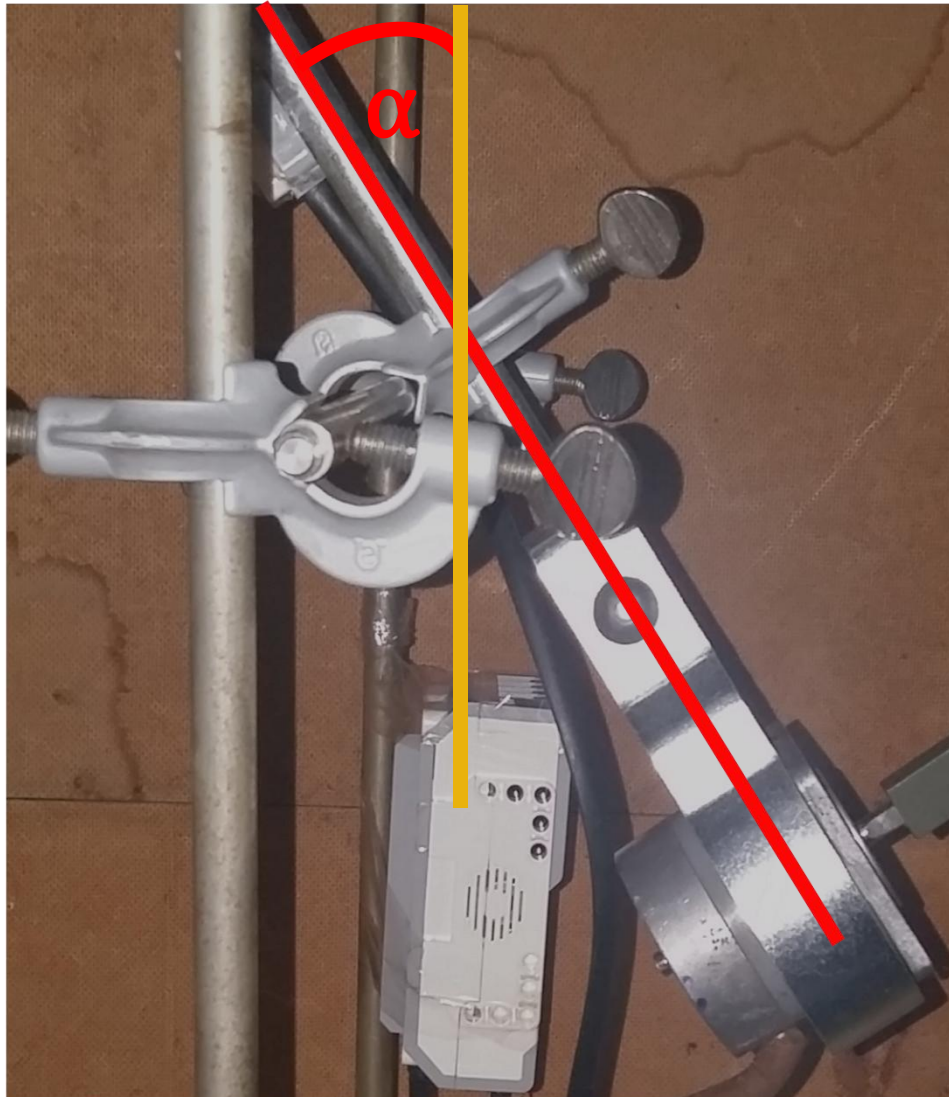


Léptető motor

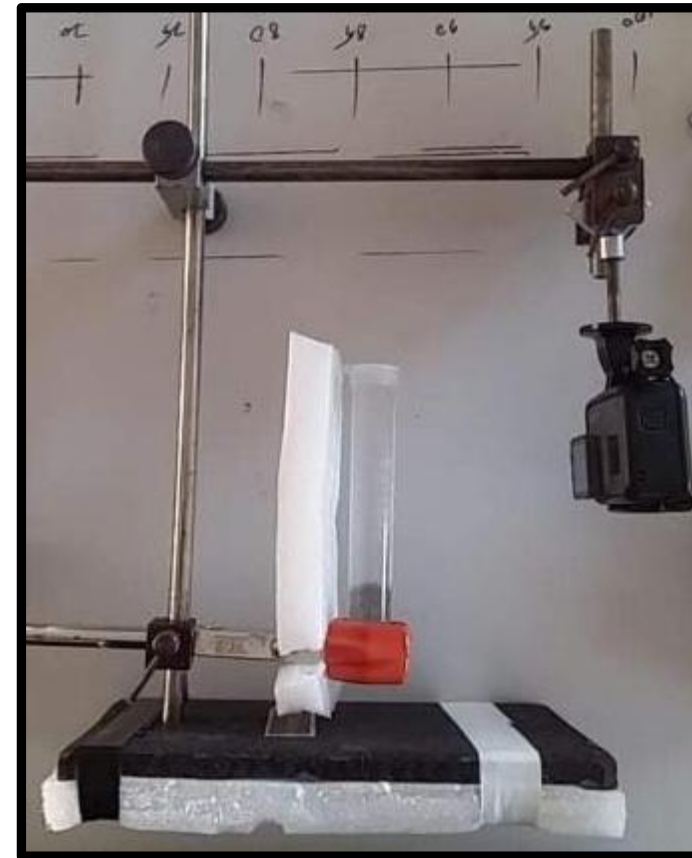
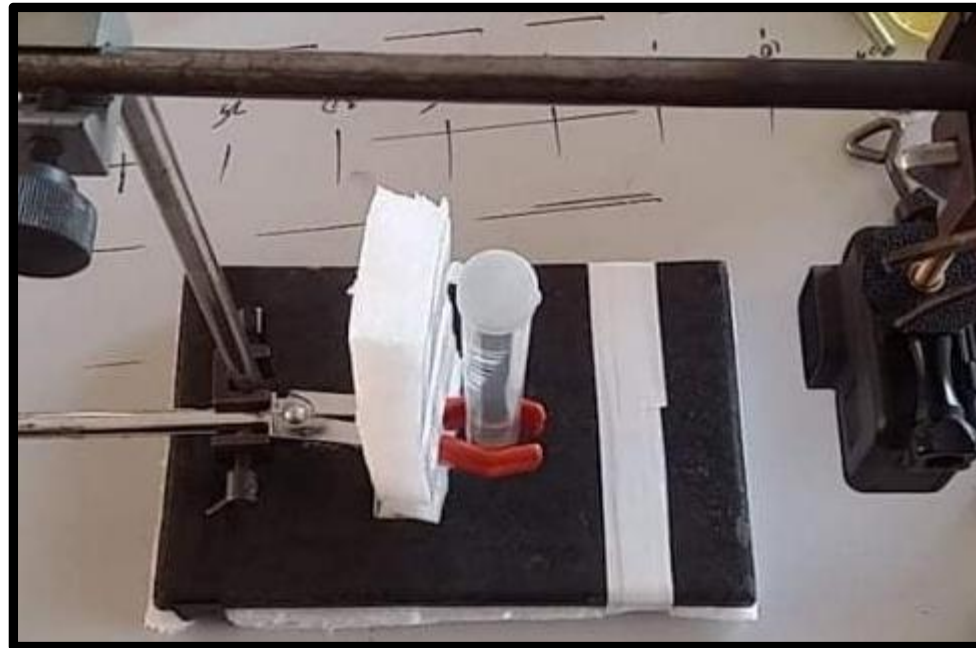
Az edény  
forgatásához

Kémcső

# A kísérleti módszer (1)



# A kísérleti eszközök (2)





Timelapse

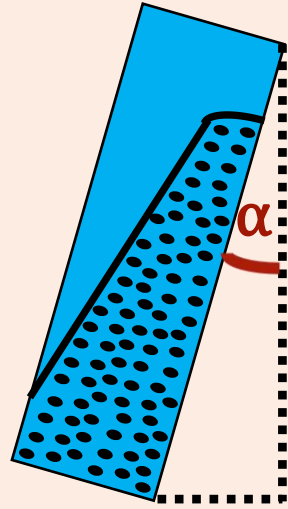
0.5 s

intervalumok

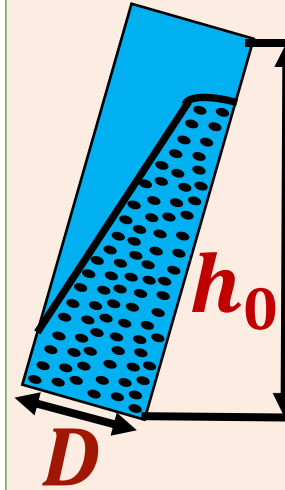


# A vizsgált paraméterek

## A döntés szöge ( $\alpha$ )



## A cső paramétere



A cső átmérője ( $D$ )  
A cső hossza ( $h_0$ )

## A folyadék



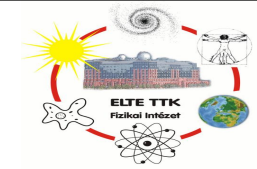
Viszkozitás ( $\eta$ )  
Sűrűség ( $\rho_L$ )

## A gyöngyök

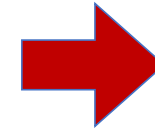


Sűrűség ( $\rho_p$ )  
Sugár ( $r$ )

# A megdöntés szöge és a h



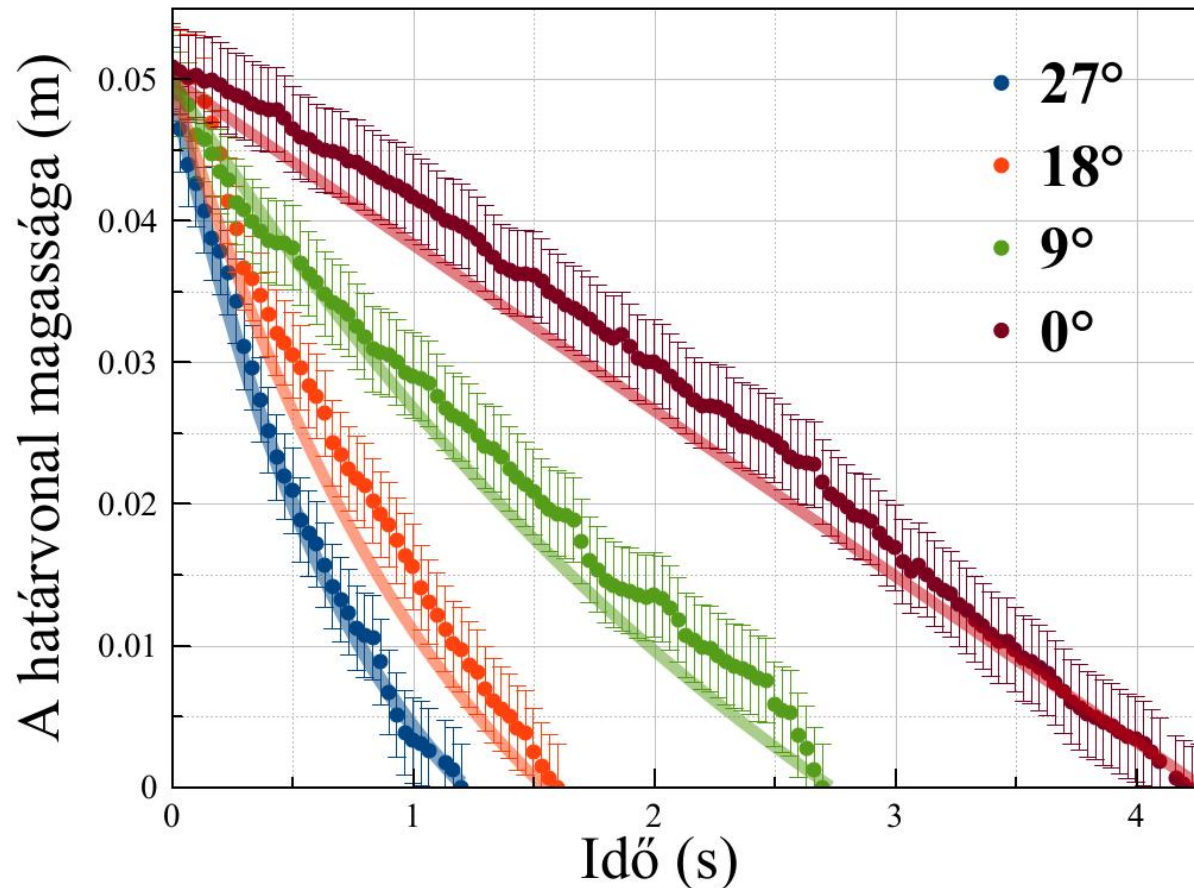
$$h = \frac{(D + h_0 \sin(\alpha)) e^{-\frac{v_e \sin(\alpha) t}{D}} - D}{\sin(\alpha)}$$



Nagyobb  $\alpha$

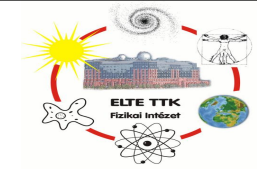


Rövidebb ülepedés

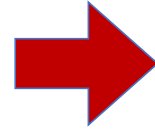


Hiba:  
 $\pm 1$  cm

# A megdöntés szöge és a felezési idő



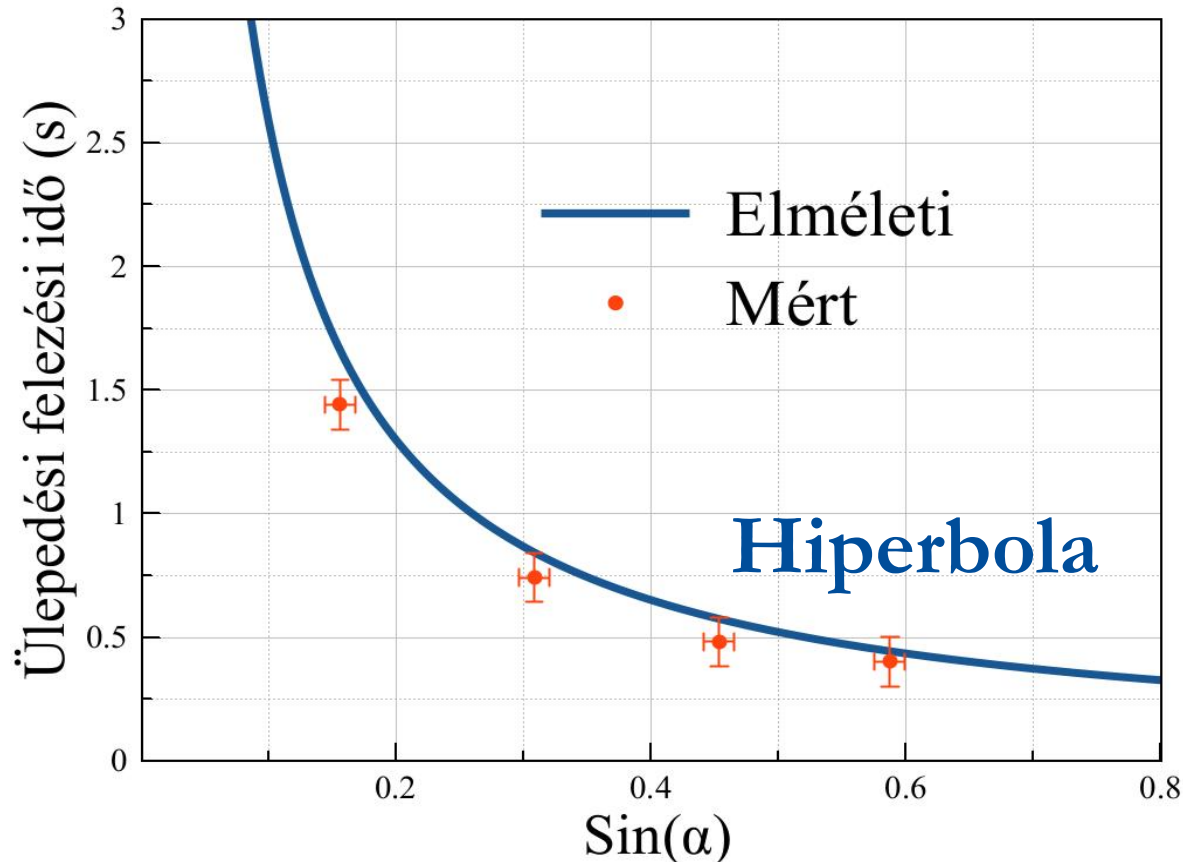
$$T = \frac{D \ln(2)}{v_e \sin(\alpha)}$$



nagyobb  $\alpha$

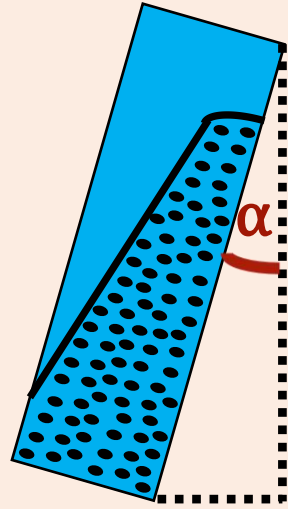


Kisebb felezési idő

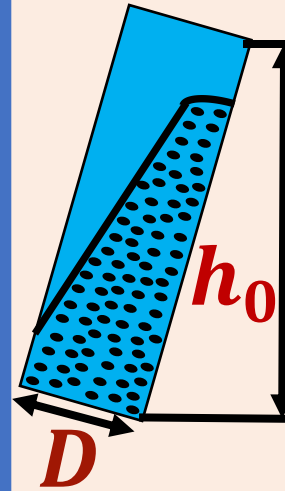


Hiba:  
 $\pm 1,5^\circ$   
 $\pm 0,1 s$

A döntés szöge ( $\alpha$ )



A cső paramétere



A cső átmérője ( $D$ )  
A cső hossza ( $h_0$ )

A folyadék



Viszkozitás ( $\eta$ )  
Sűrűség ( $\rho_L$ )

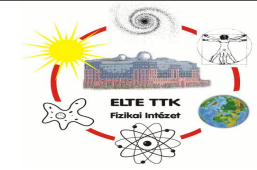
A gyöngyök



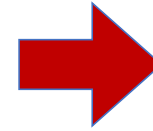
Sűrűség ( $\rho_p$ )  
Sugár ( $r$ )



# Az átmérő (D) és a h



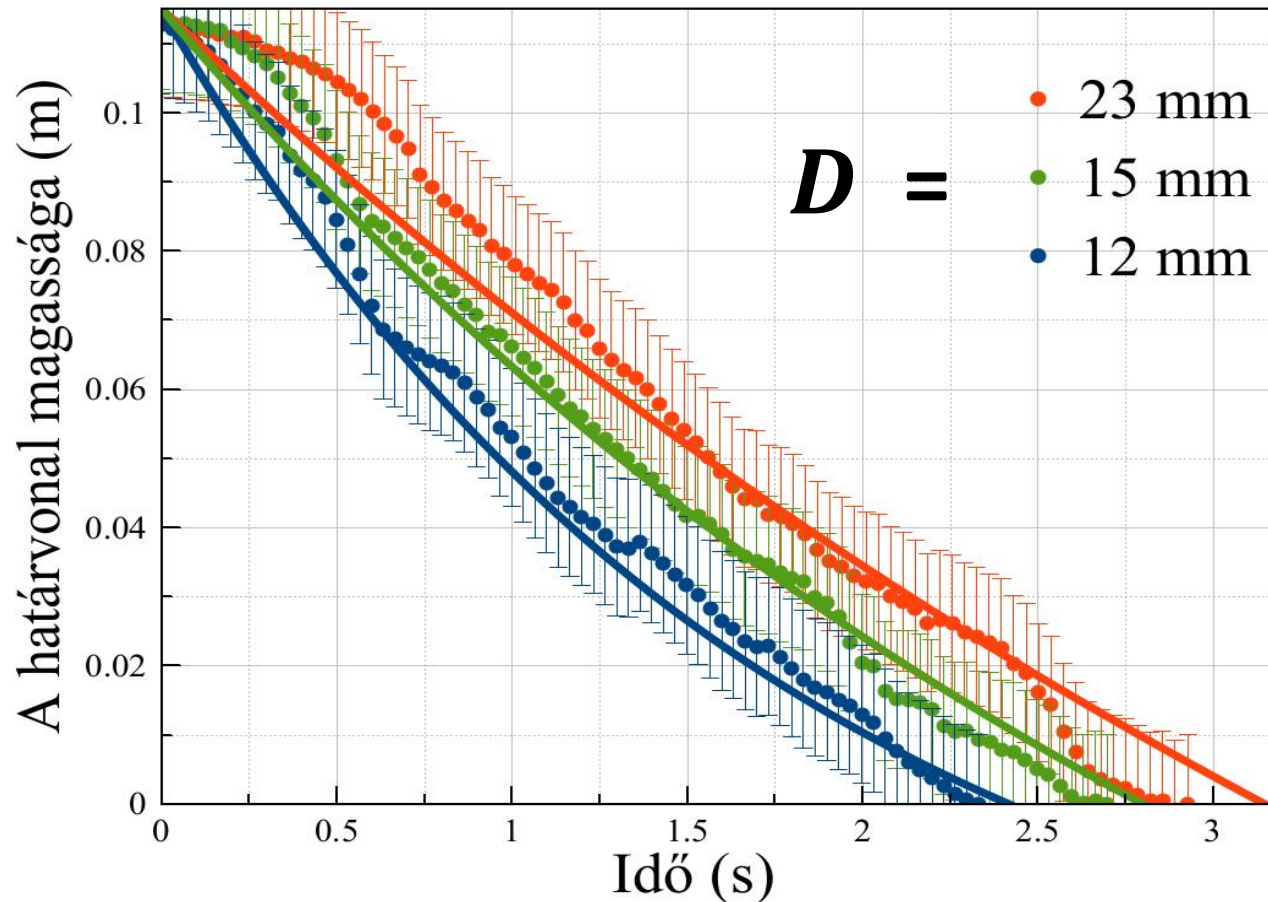
$$h = \frac{(D + h_0 \sin(\alpha)) e^{-\frac{v_e \sin(\alpha) t}{D}} - D}{\sin(\alpha)}$$



nagyobb  $D$

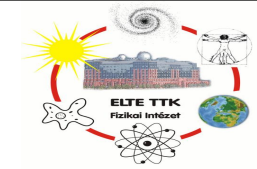


Hosszabb ülepedés

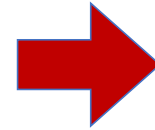


Hiba:  
 $\pm 1$  cm

# Az átmérő ( $D$ ) és a felezési idő



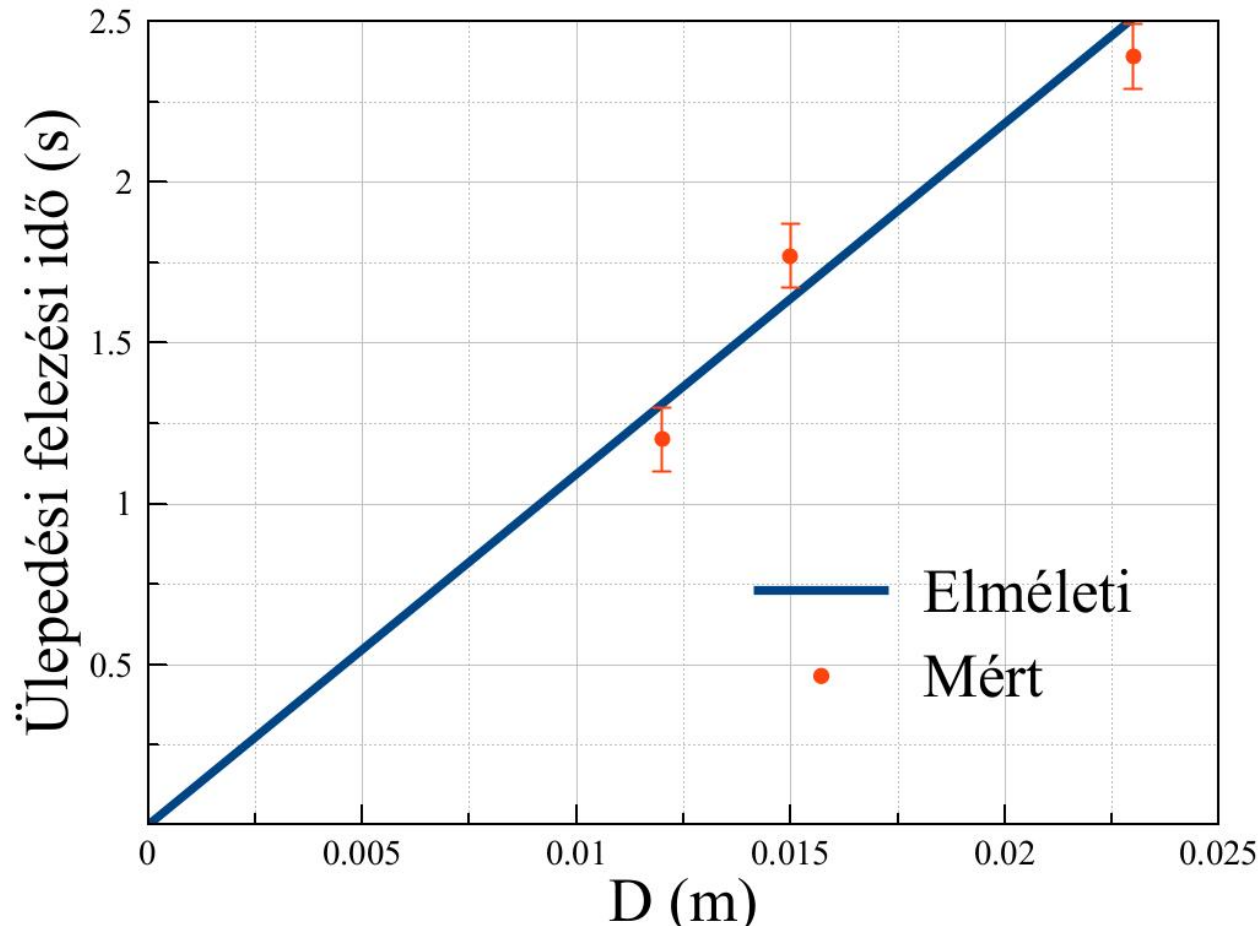
$$T = \frac{D \ln(2)}{v_e \sin(\alpha)}$$



nagyobb  $D$

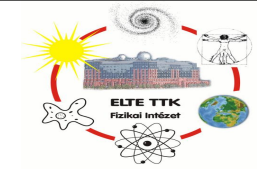


Nagyobb felezési idő



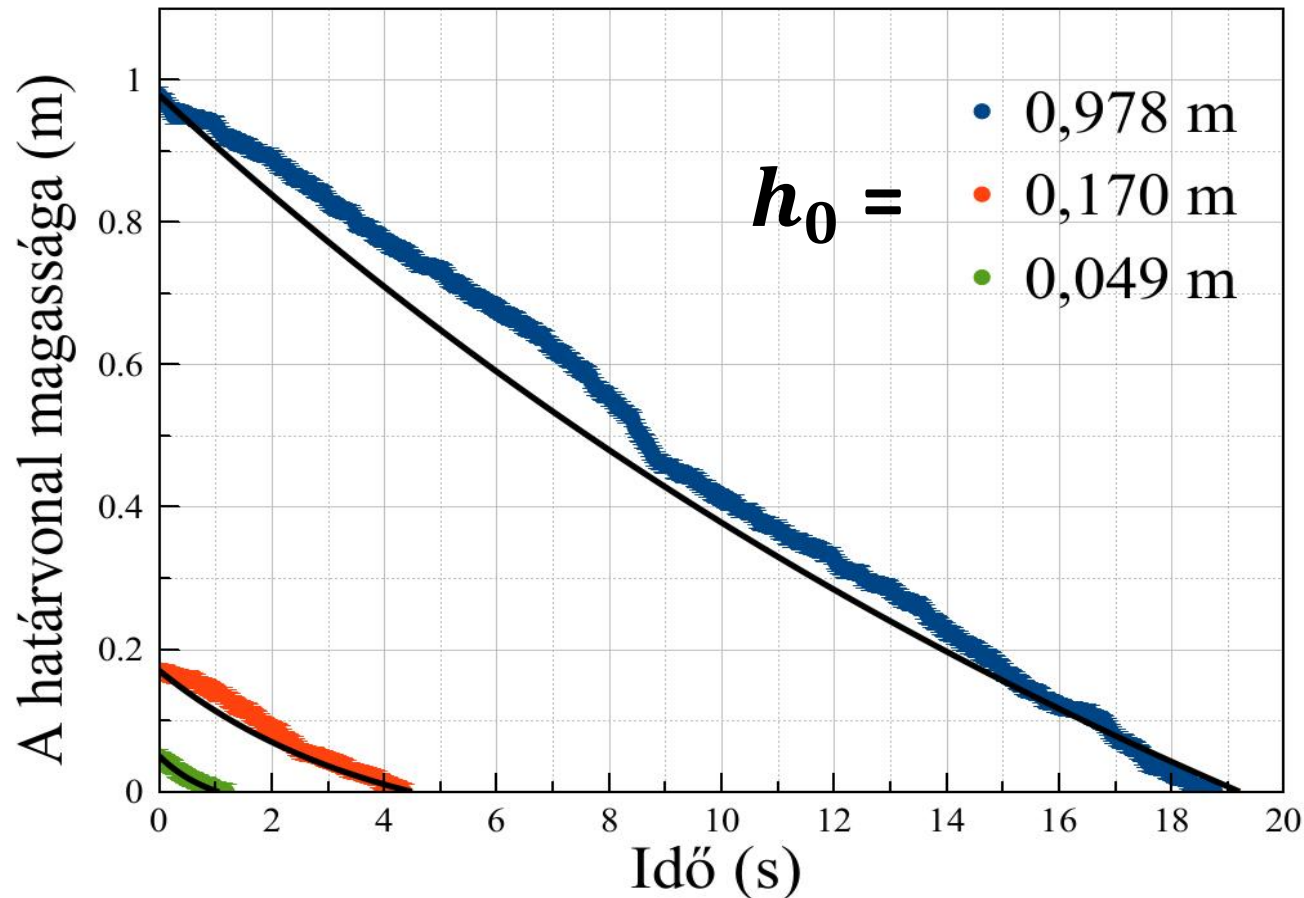
Hiba:  
 $\pm 0,1 s$

# A cső hossza ( $h_0$ ) és az ülepedési idő



$$t_0 = \frac{D \ln \left( \frac{D + h_0 \sin(\alpha)}{D} \right)}{v_e \sin(\alpha)}$$

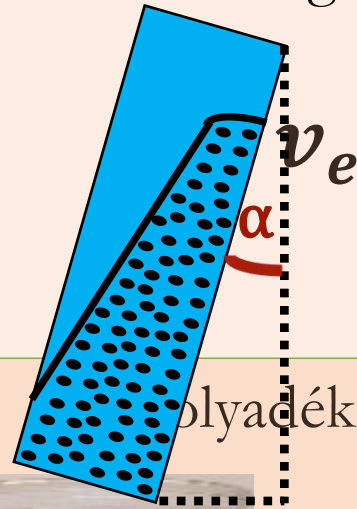
nagyobb  $h_0$   
↓  
Hosszabb ülepedés



Hiba:  
 **$\pm 1$  cm**

# A vizsgált paraméterek

A döntés szöge ( $\alpha$ )



$$v_e = \frac{2r^2 g (\rho_p - \rho_L)}{9\eta}$$

A cső paramétere



A cső átmérője ( $D$ )  
A cső hossza ( $h_0$ )

A folyadék

A gyöngyök



A folyadék Sűrűség ( $\rho_L$ )

Viszkozitás ( $\eta$ )

Viszkozitás ( $\eta$ )

Sűrűség ( $\rho_L$ )

Sűrűség ( $\rho_p$ )

A gyöngyök

Sugár ( $r$ )



Sűrűség ( $\rho_p$ )

Sugár ( $r$ )

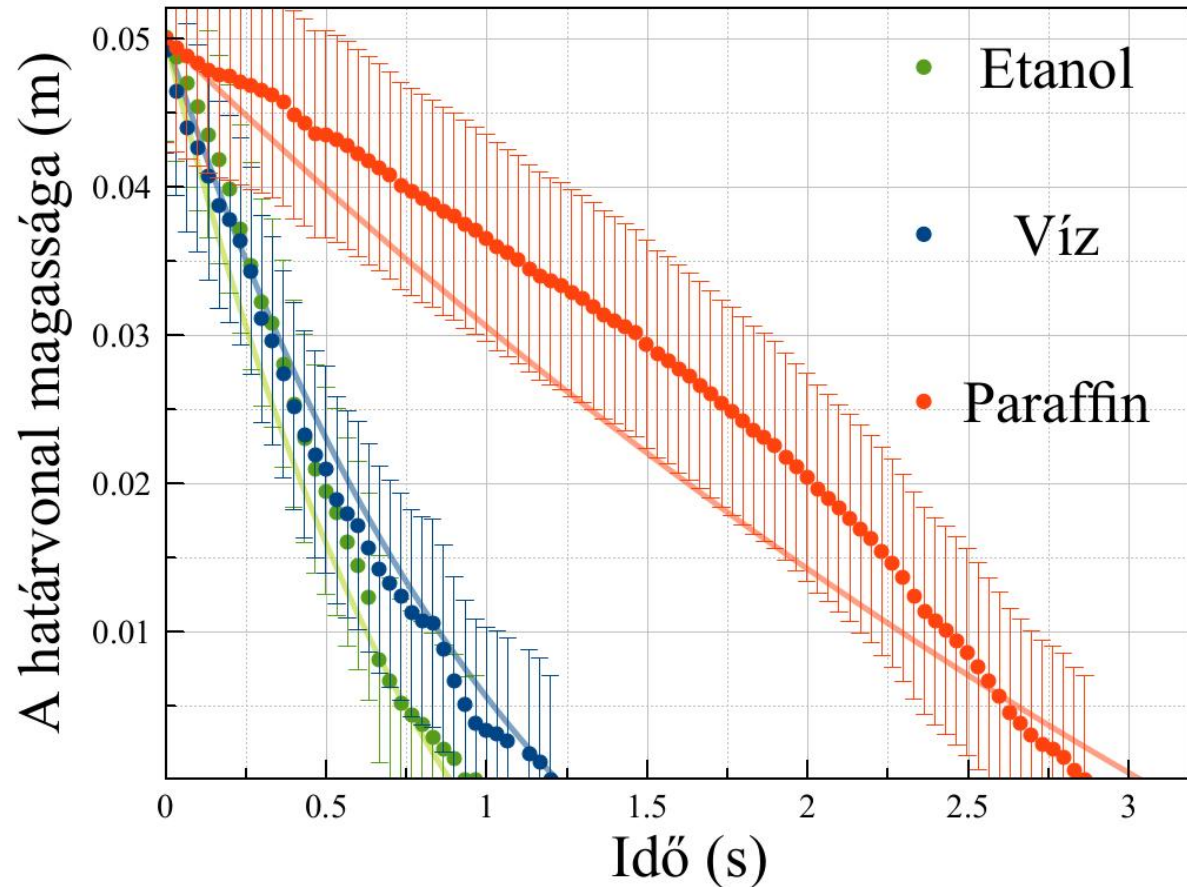
$$h = \frac{(D + h_0 \sin(\alpha)) e^{-\frac{v_e \sin(\alpha)t}{D}} - D}{\sin(\alpha)} \quad \rightarrow \quad v_e = \frac{2r^2 g(\rho_p - \rho_l)}{9\eta}$$

$$\left(\frac{\rho_p}{\eta} - \frac{\rho_l}{\eta}\right) = \frac{\Delta\rho}{\eta}$$

nagyobb  $\frac{\Delta\rho}{\eta}$



Rövidebb ülepedés



$$T = \frac{D \ln(2)}{v_e \sin(\alpha)} \rightarrow v_e = \frac{2r^2 g(\rho_p - \rho_l)}{9\eta} \rightarrow \left( \frac{\rho_p}{\eta} - \frac{\rho_l}{\eta} \right) = \frac{\Delta\rho}{\eta}$$

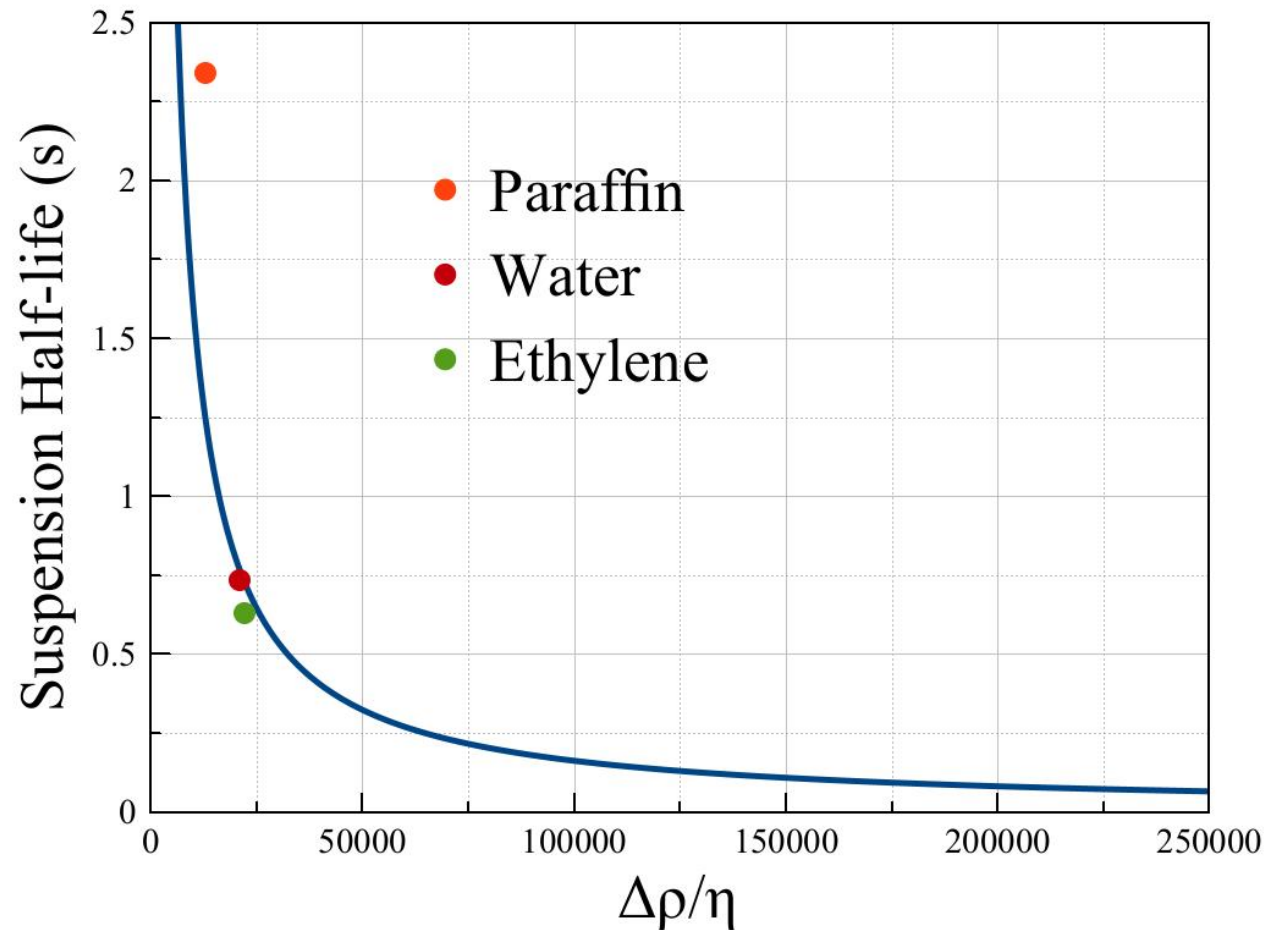
$$T \sim \frac{\eta}{\Delta\rho}$$



Nagyobb  $\frac{\Delta\rho}{\eta}$

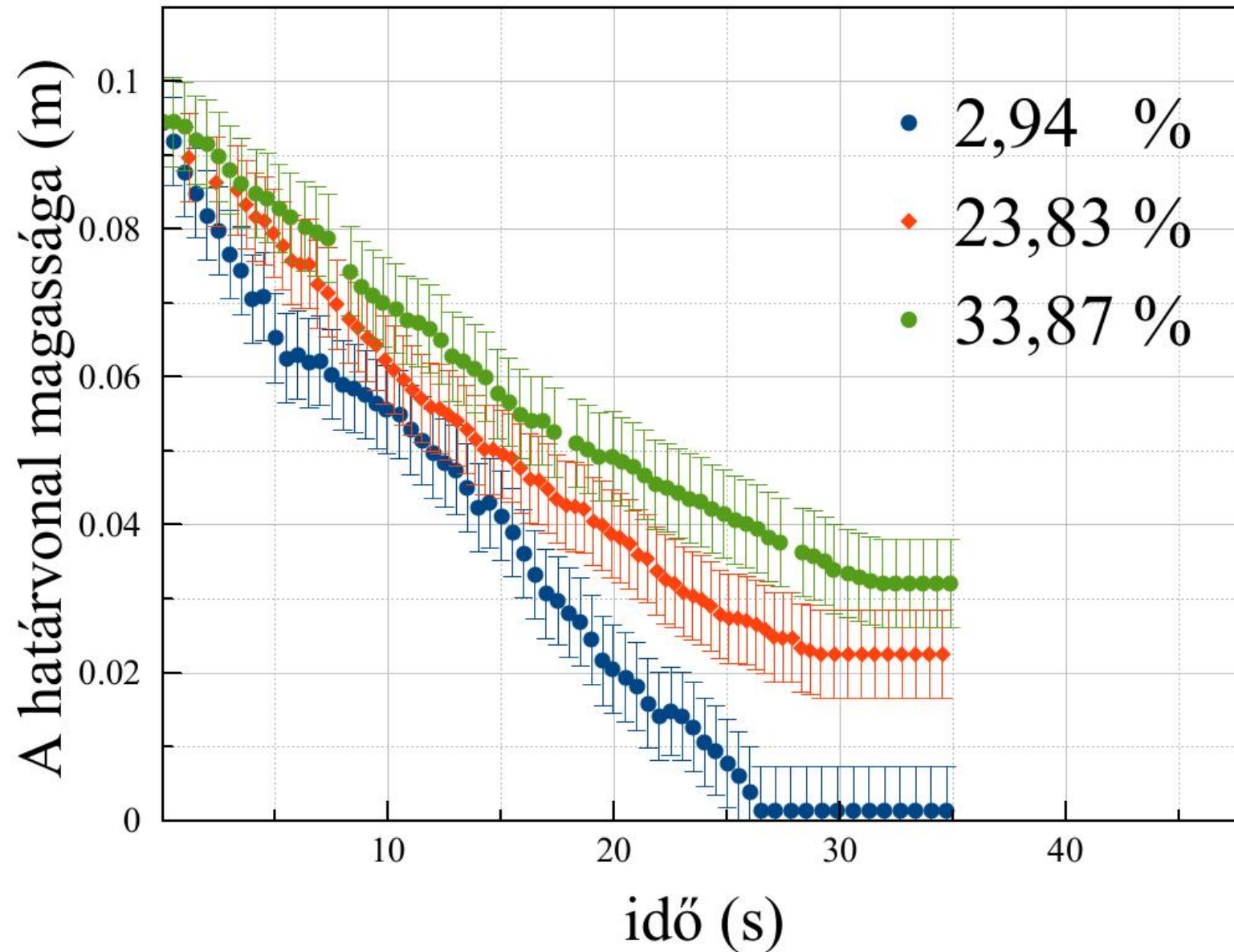
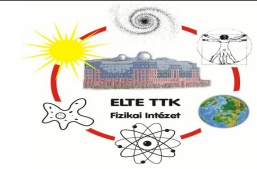


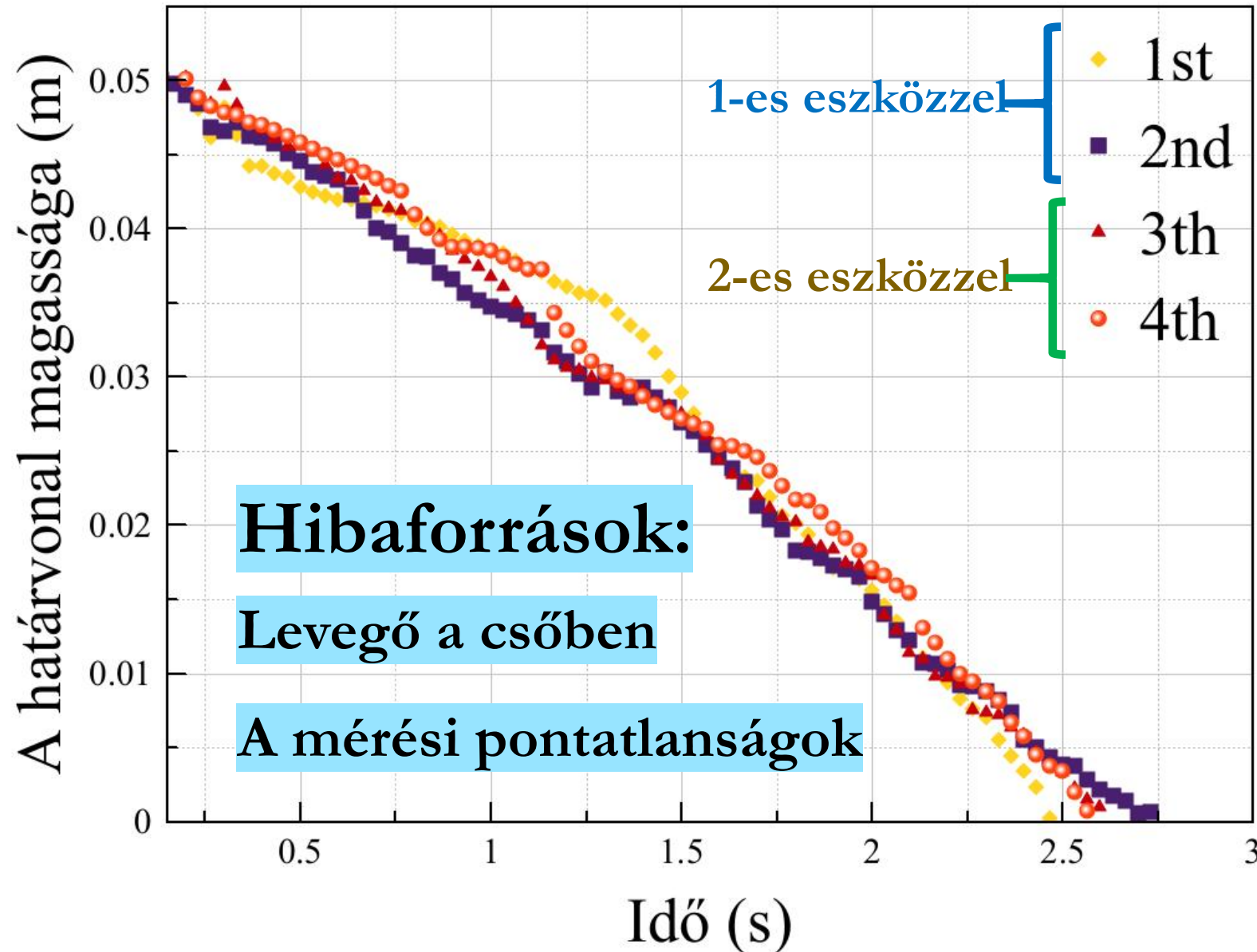
Kisebb felezési idő





# Koncentráció (térfogat arány)

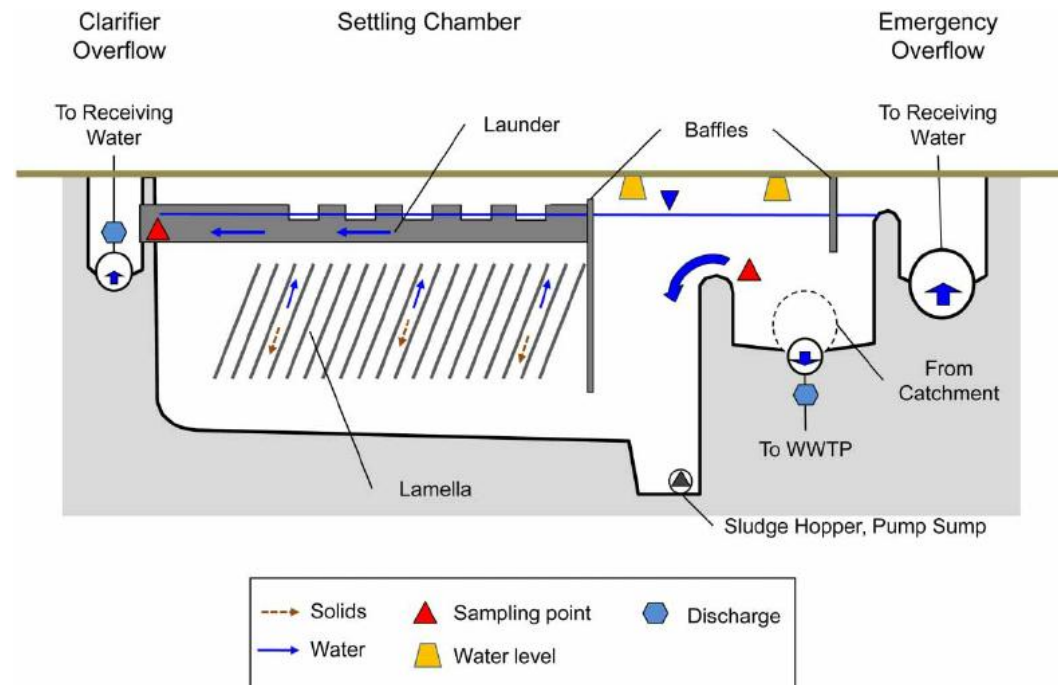




Kísérlet



Adott részecskeméretre optimalizálható az ülepitő,  
az ülepedési idő minimalizálásához.



- A jelenség alapjai
- Elmélet az ülepedési áramlás idejére
- Mérési összeállítás és módszer
- Vizsgált paraméterek és Mérési eredmények
  - ❖ A döntés szöge
  - ❖ A cső paraméterei
  - ❖ A folyadék anyagi minősége
  - ❖ A részecskék tulajdonságai
- Gyakorlati alkalmazások



[1] Efstathios E. Michaelides, Zu-Jia Xu (2005).

ResearchGate,

A Numerical Simulation of the Boycott Effect.

DOI:10.1080/00986440590477971

[2] Stephan Fuchs (2014).

ResearchGate,

Lamella settlers for storm water treatment -

Performance and design recommendations

Doi:[10.2166/wst.2013.698](https://doi.org/10.2166/wst.2013.698)

# Sokszögörvény vizsgálata

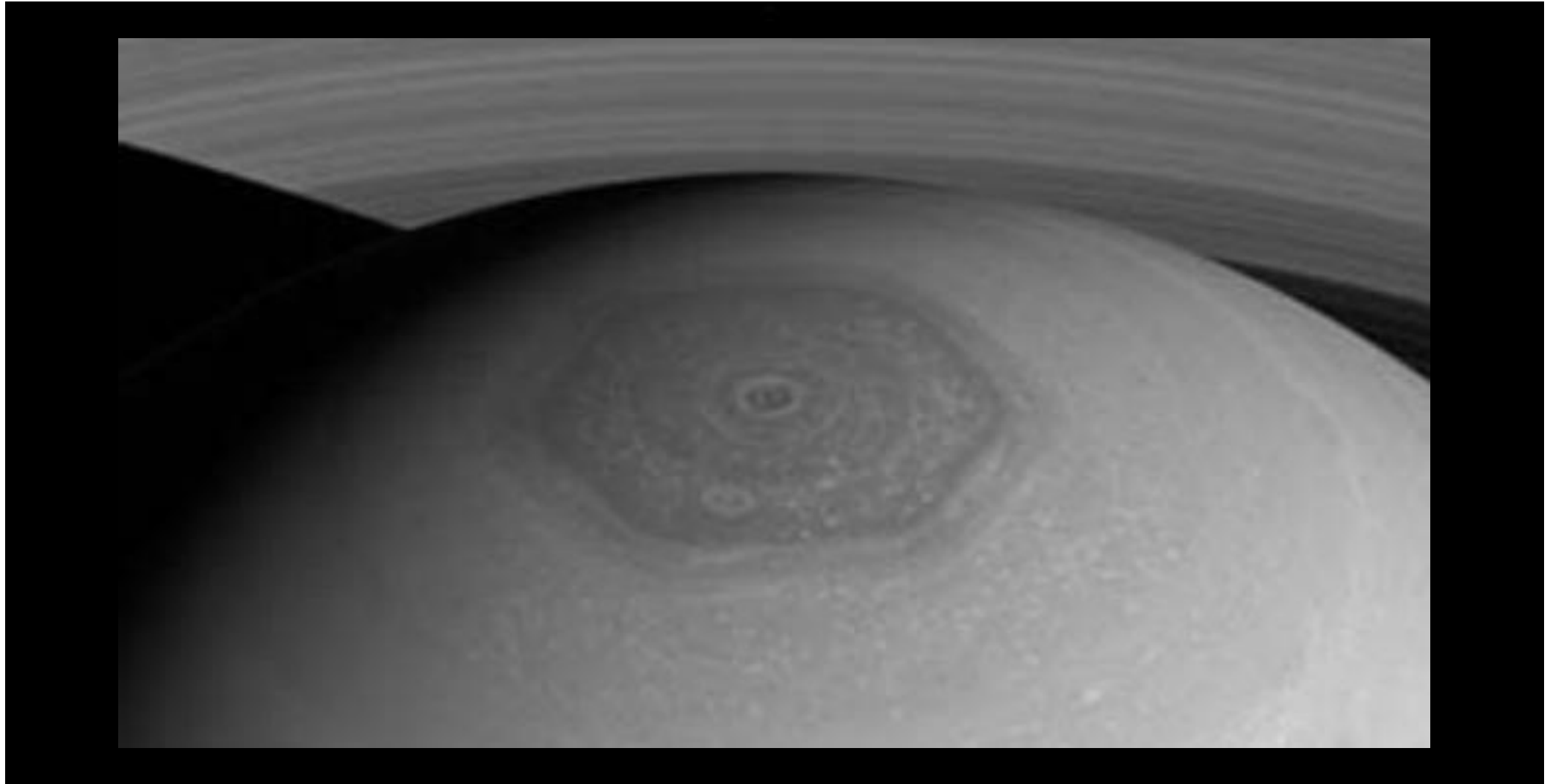
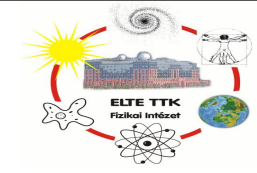
Kadlecsik Ádám

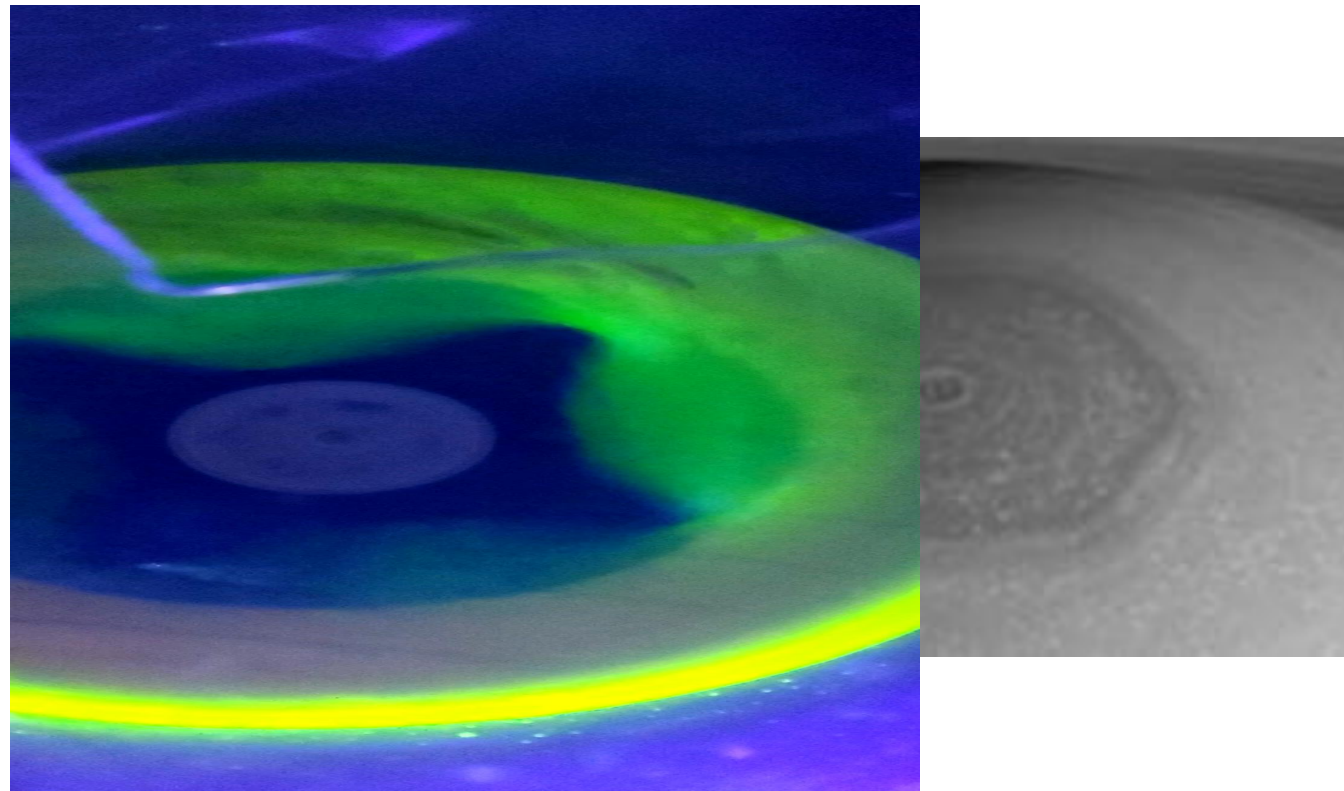
*ELTE - fizikus hallgató*

*Eötvös József Gimnázium és Kollégium, Tata - egykori diák*

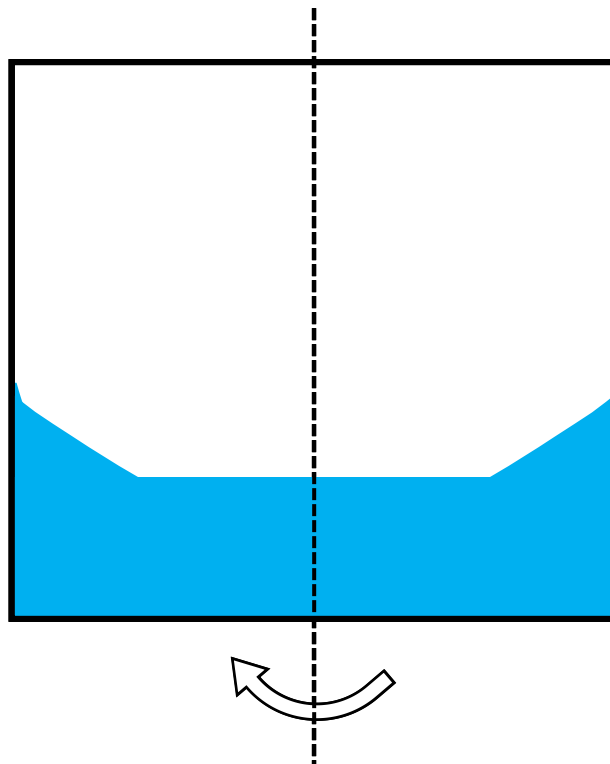
mentor: dr. Vincze Miklós, dr. Szeidemann Ákos

# Miről lesz szó?

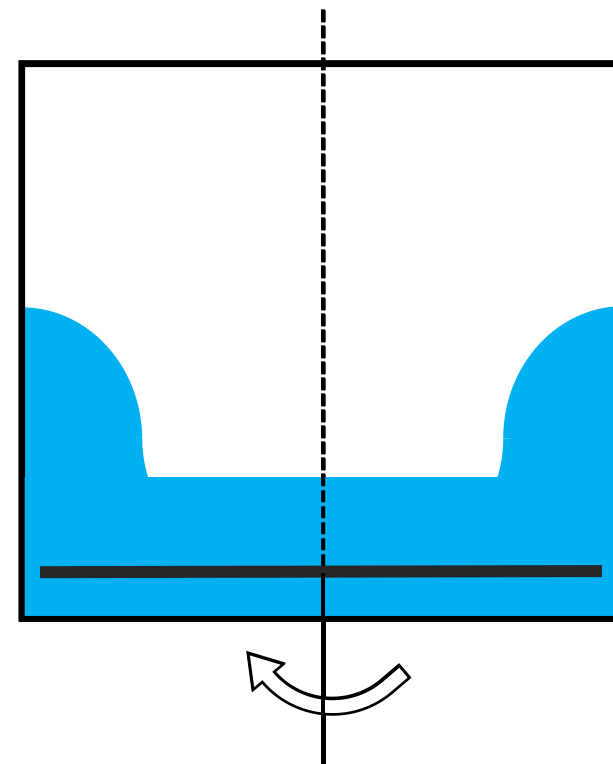


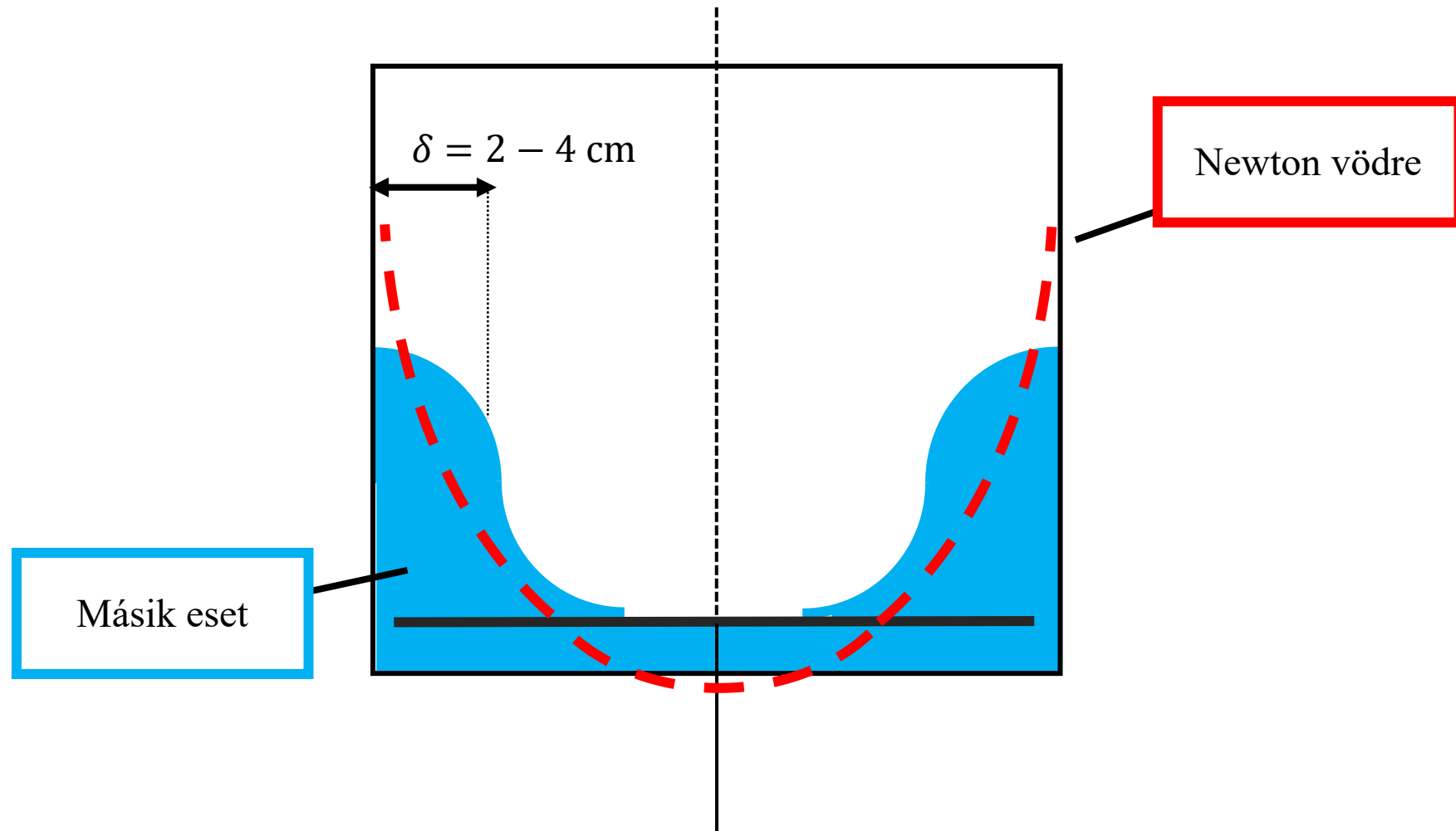


Newton vödre



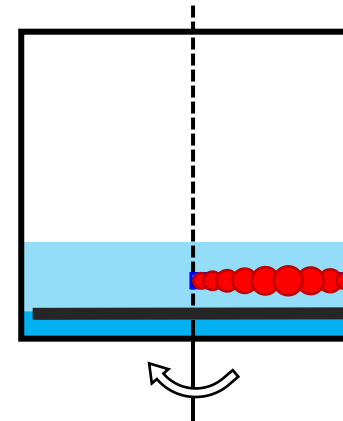
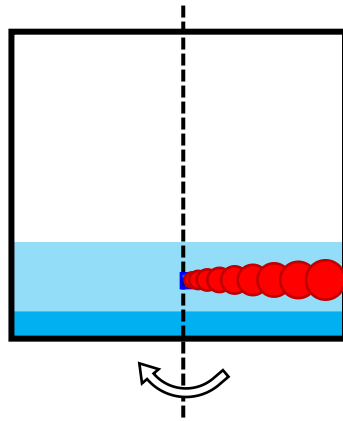
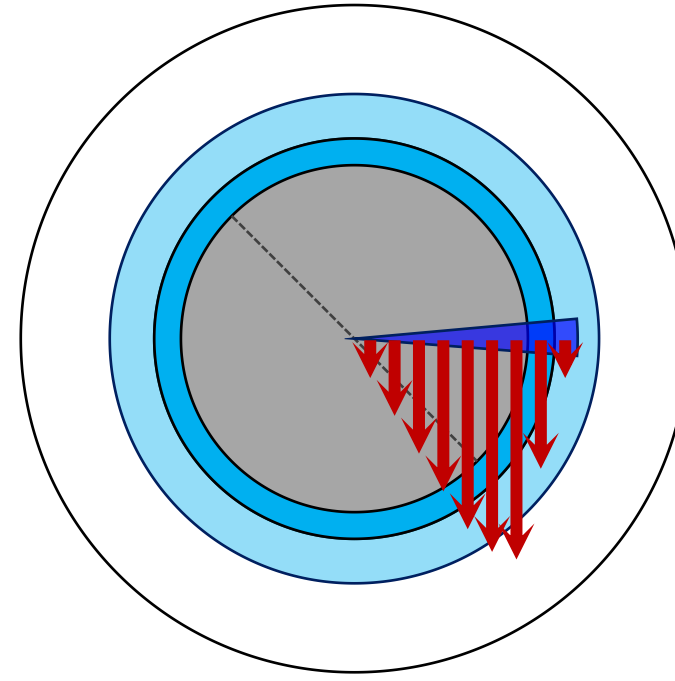
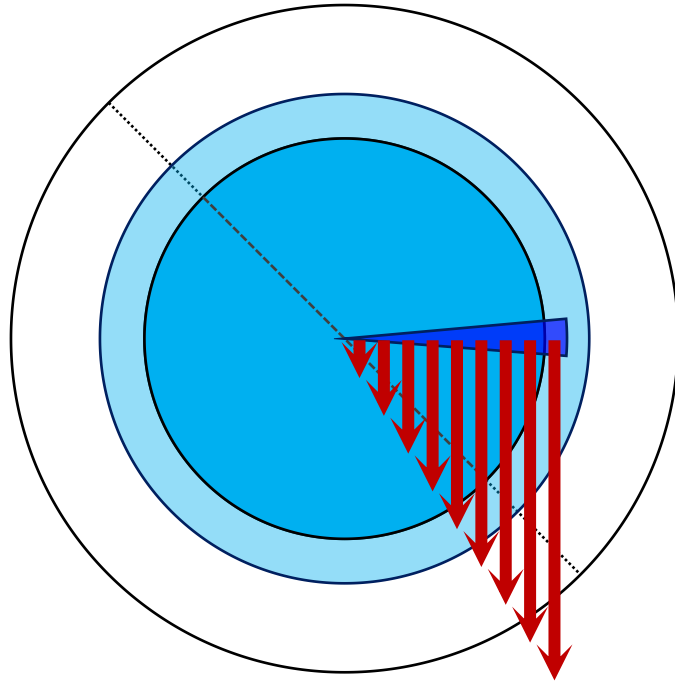
Másik eset





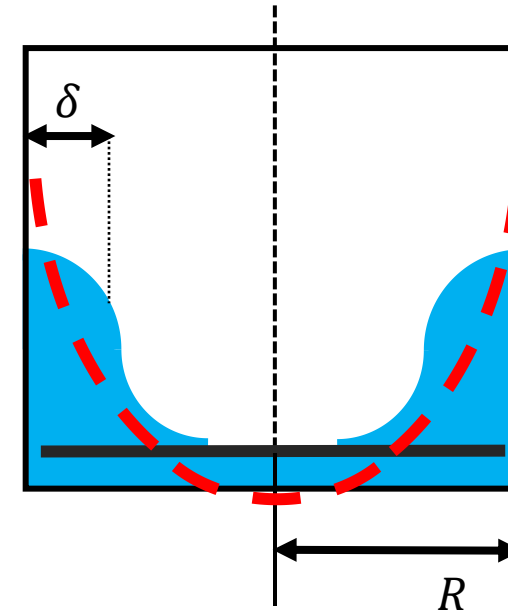
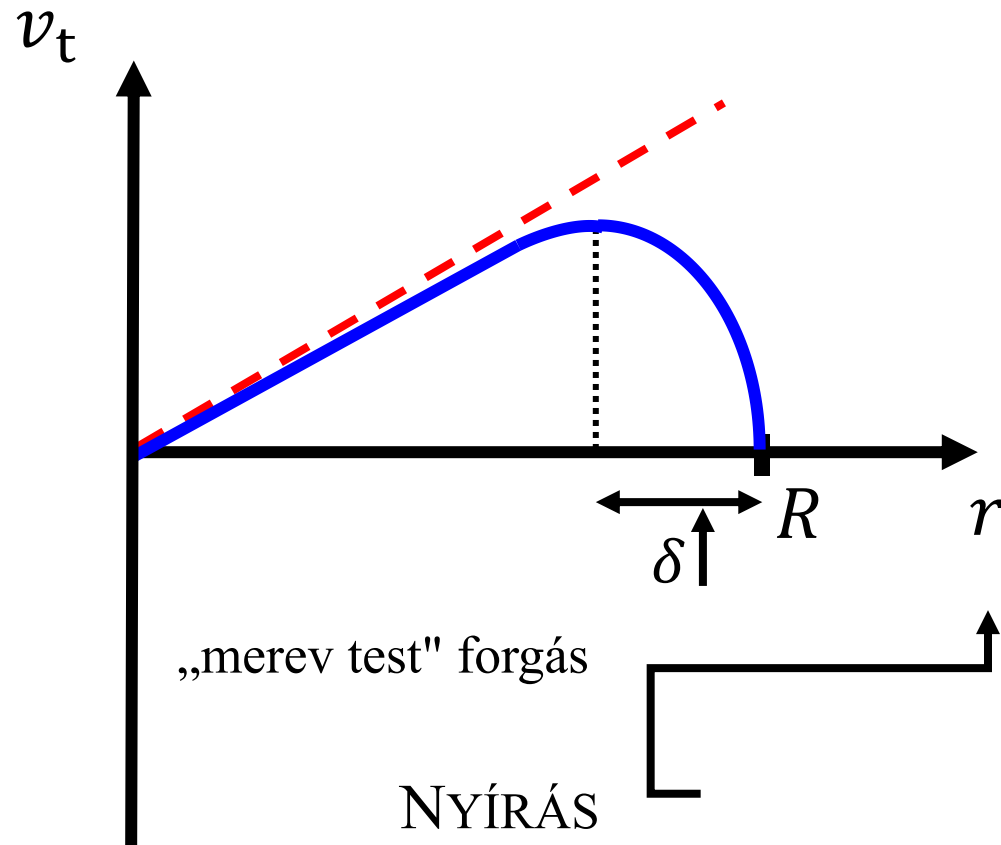


# Tangenciális sebességek

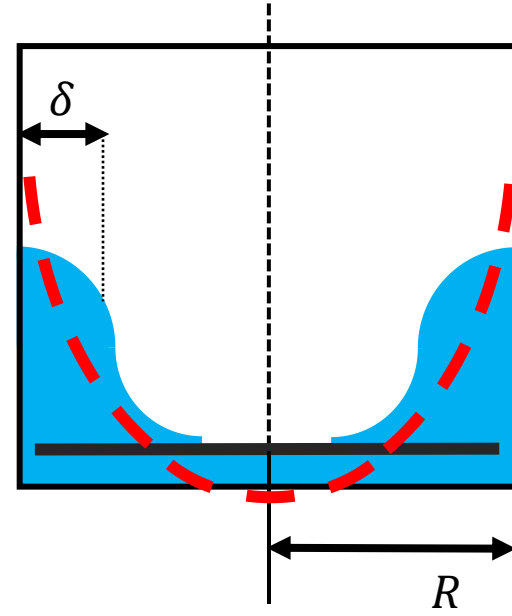
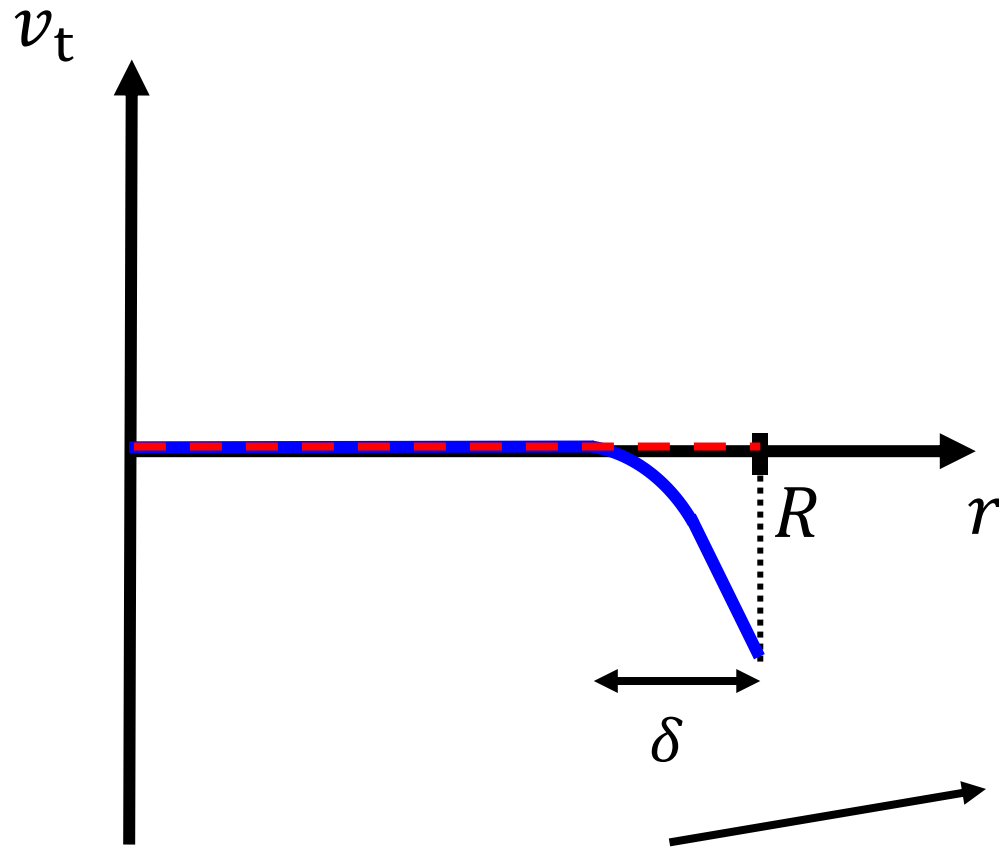


\*Csak kvalitatív ábrázolás

Külső koordinátarendszerből nézve



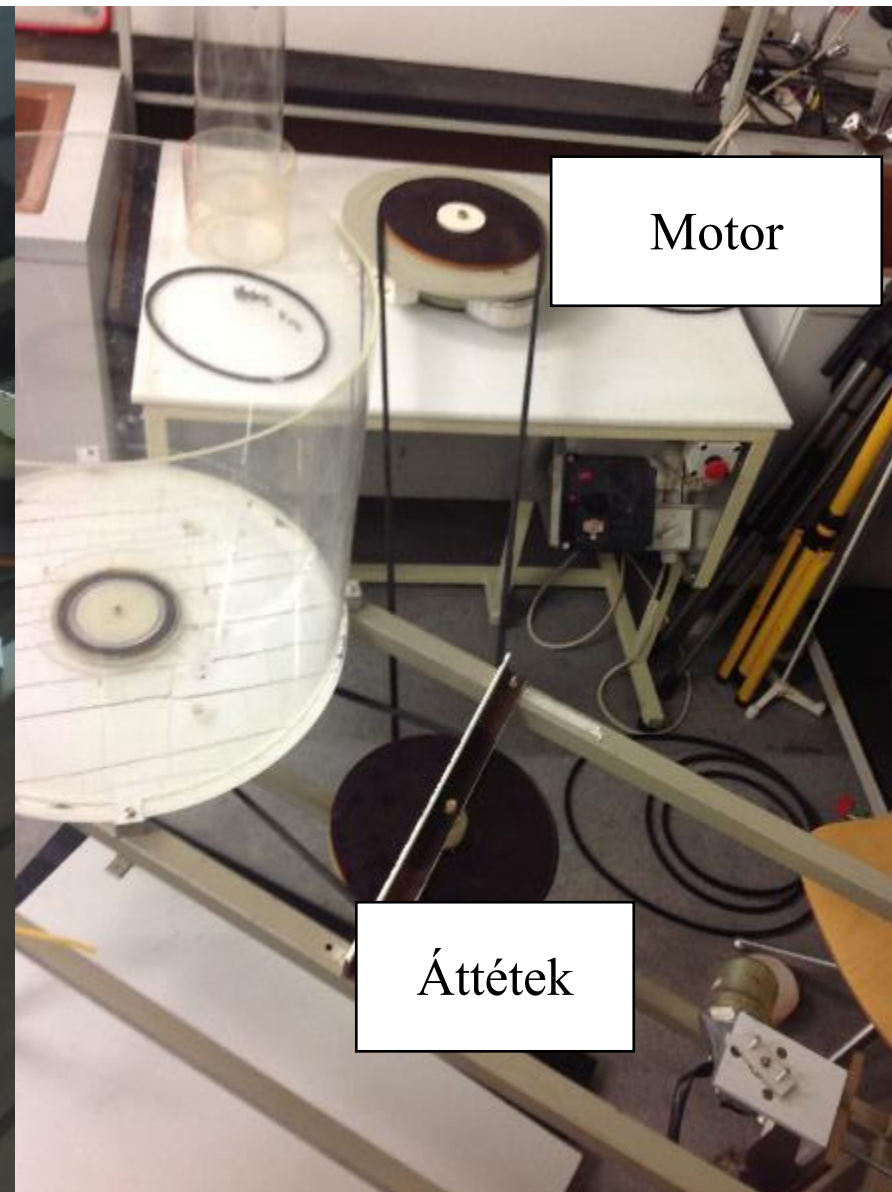
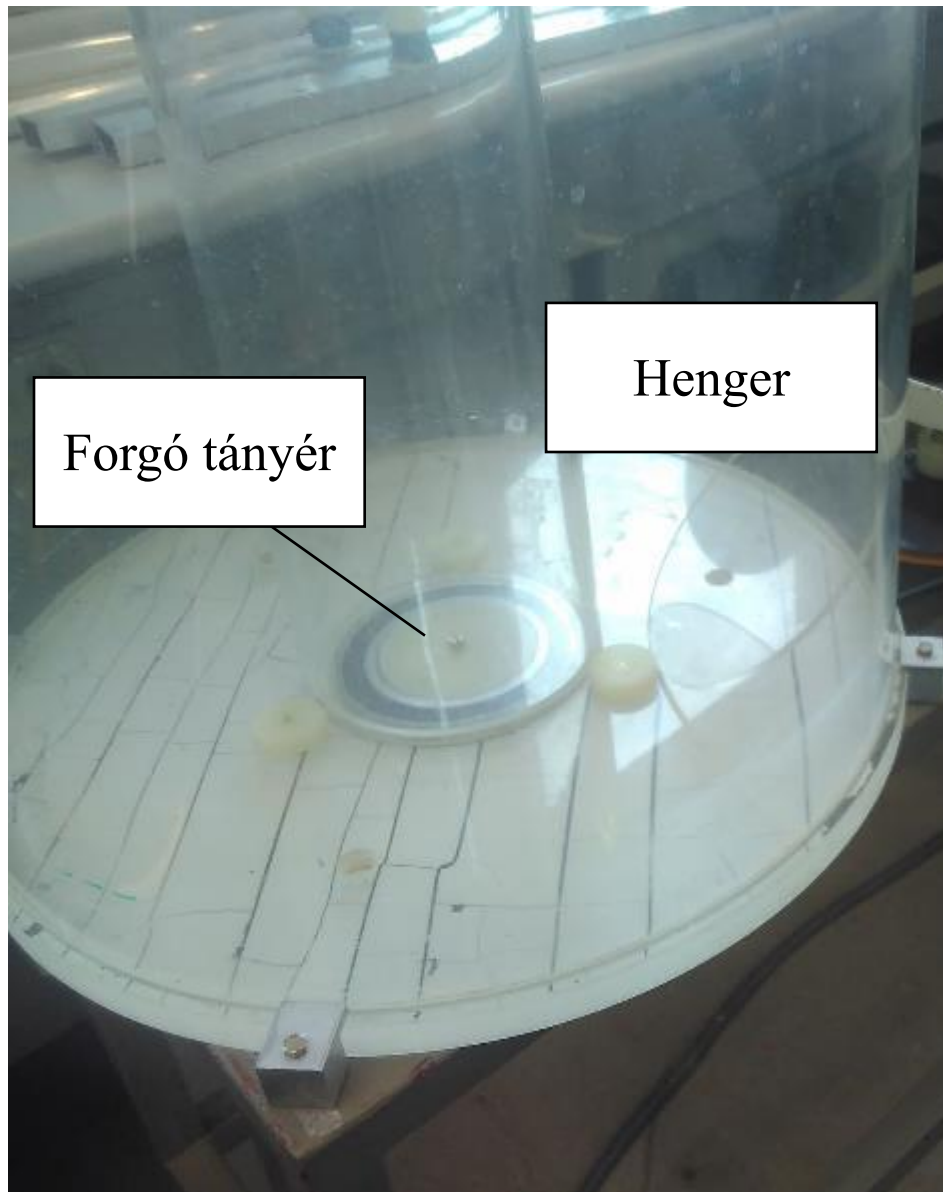
Együttforgó koordinátarendszerből nézve



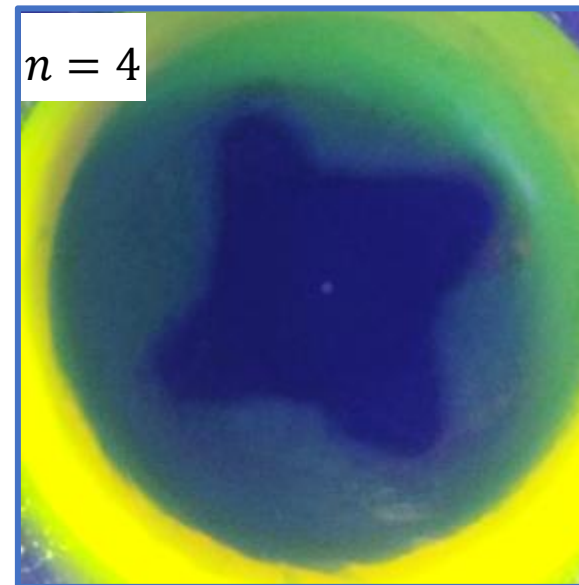
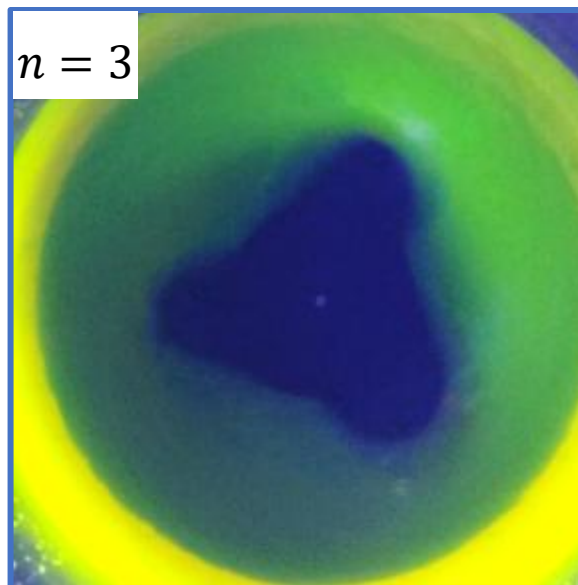
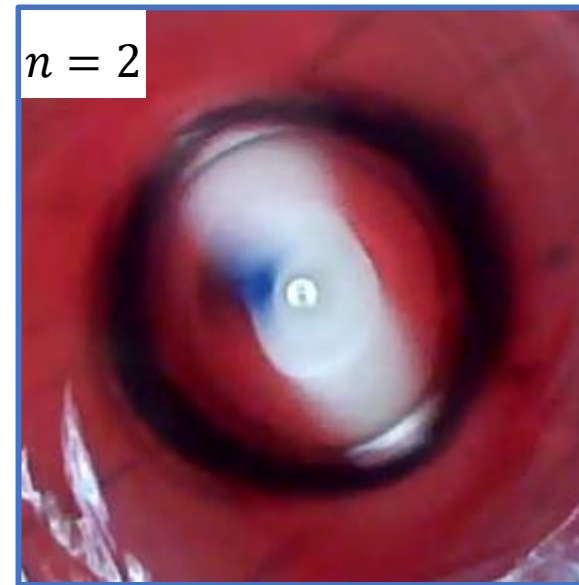
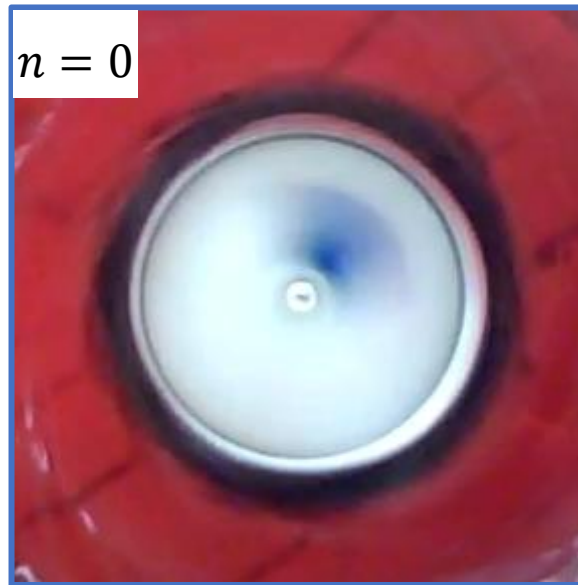
Gyorsabb áramlás

Ez a  $\delta$  az oka annak, hogy komplexebb dolgokat is láthatunk.

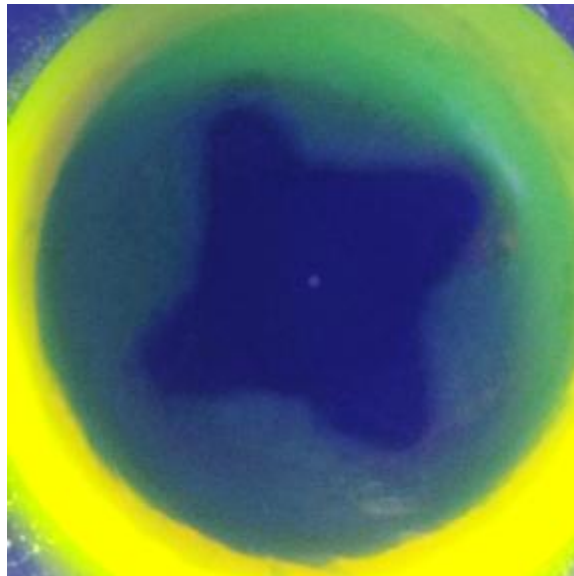
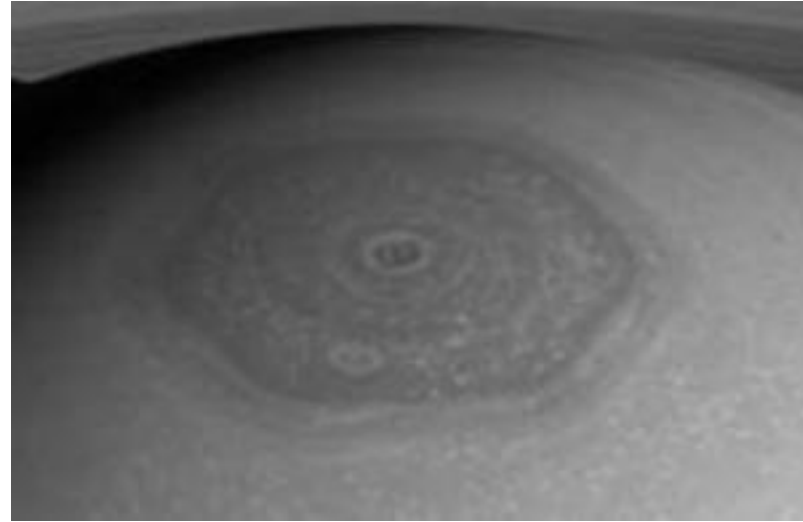
# A mérési összeállítás



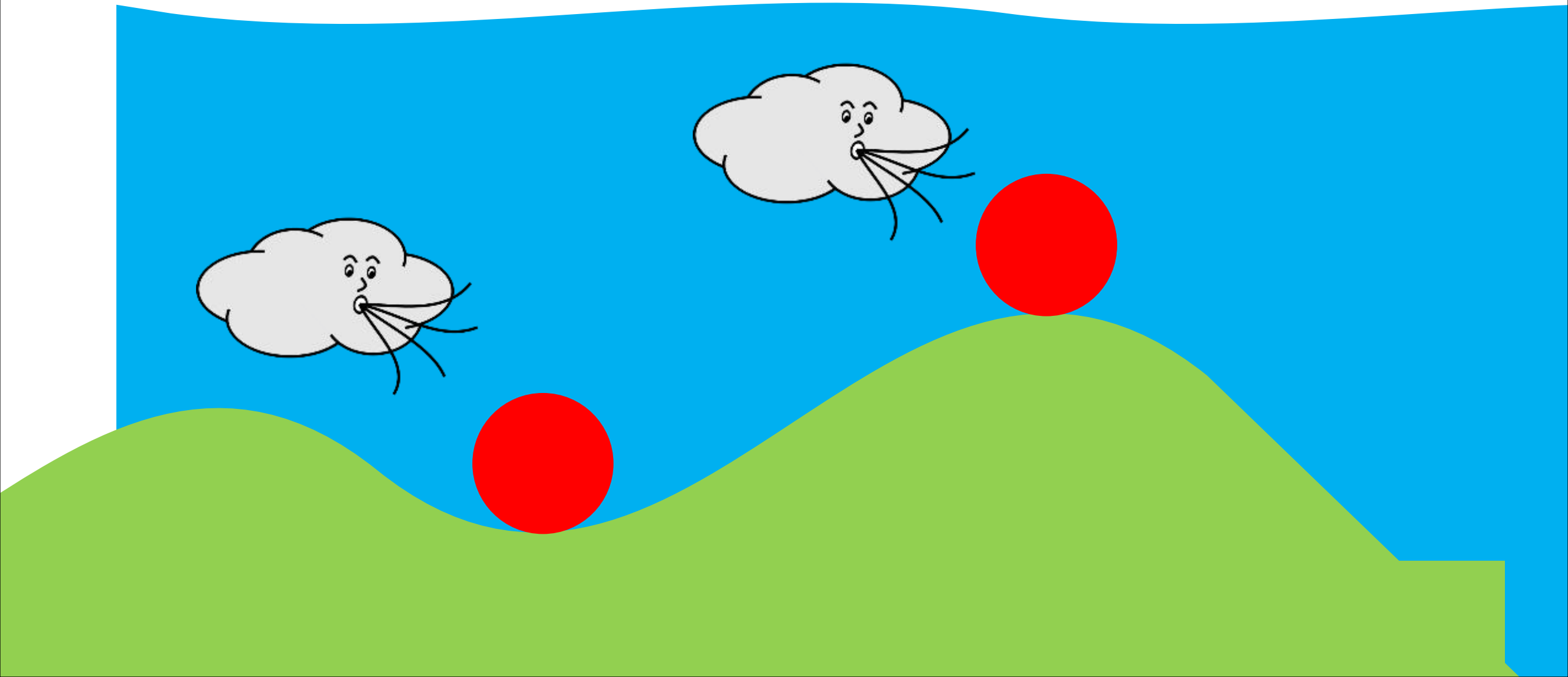
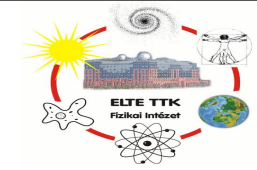
# Más “sokszögek” is vannak!



# De akkor mi történik itt?

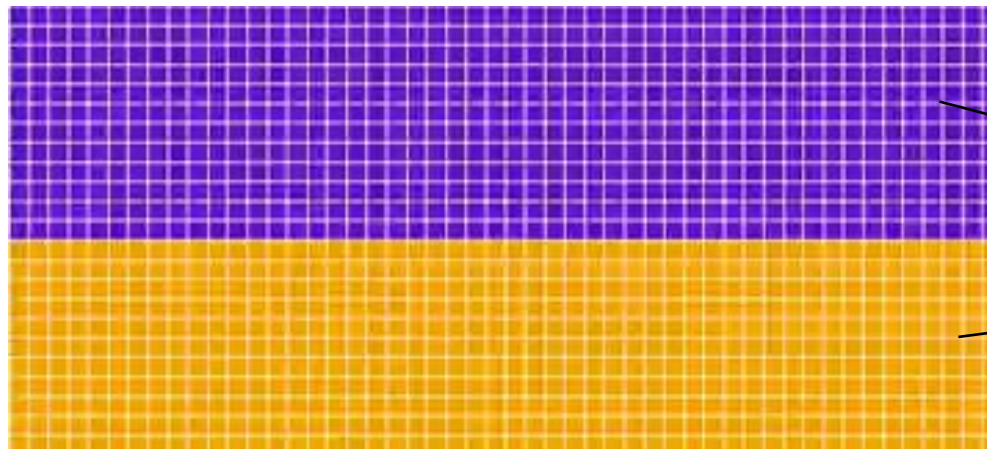


# Pár szó az instabilitásról



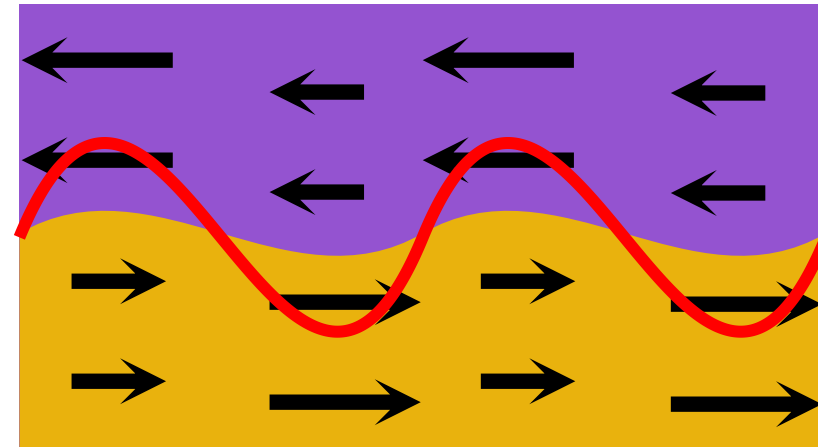
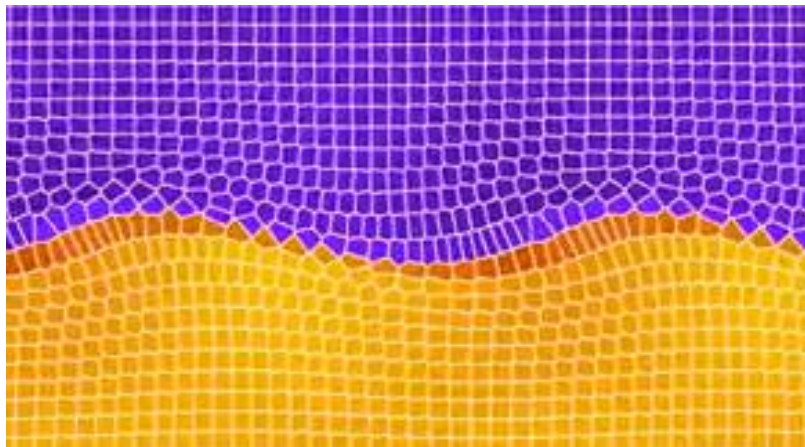
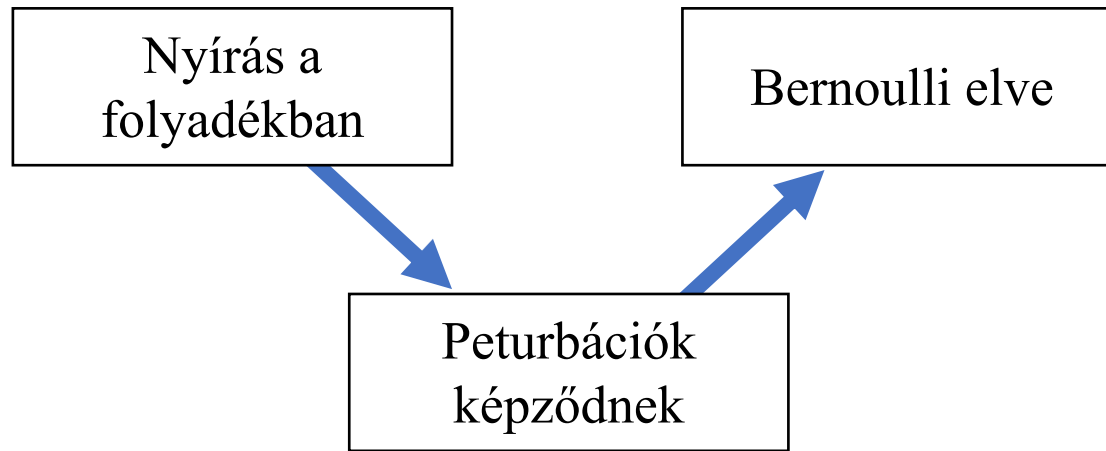


- Kelvin—Helmholtz-instabilitás



Más folyadékok,  
relatív sebesség  
különbséggel

- Nálunk:
  - Nincsenek más folyadékok, csak sebesség különbség
  - Ez nem más, mint  $\delta$  nyírás.

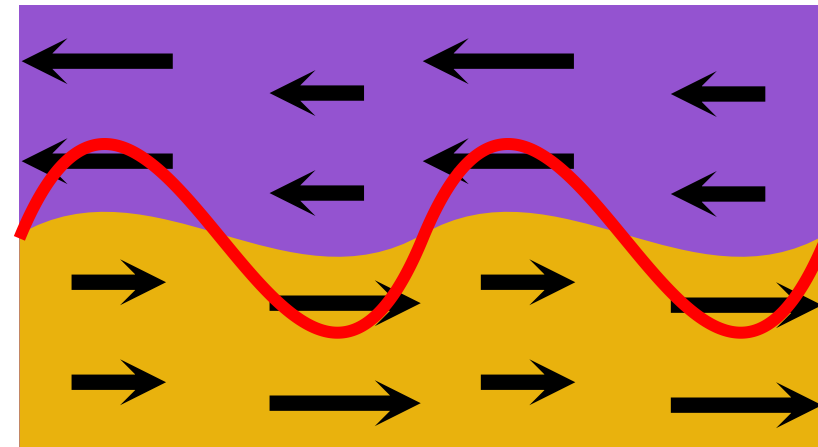
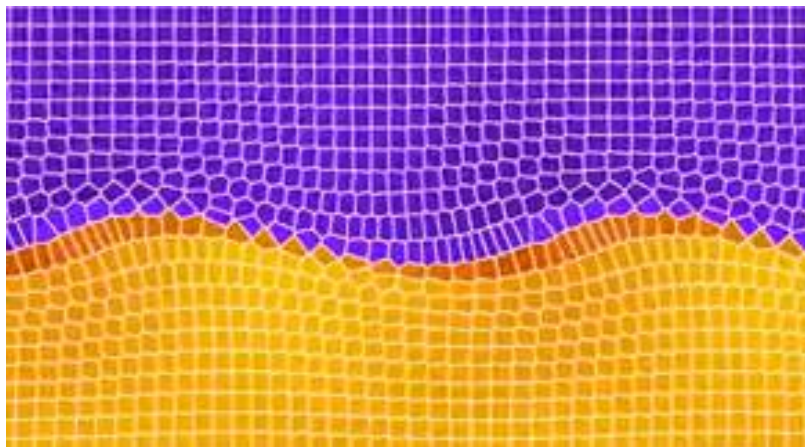


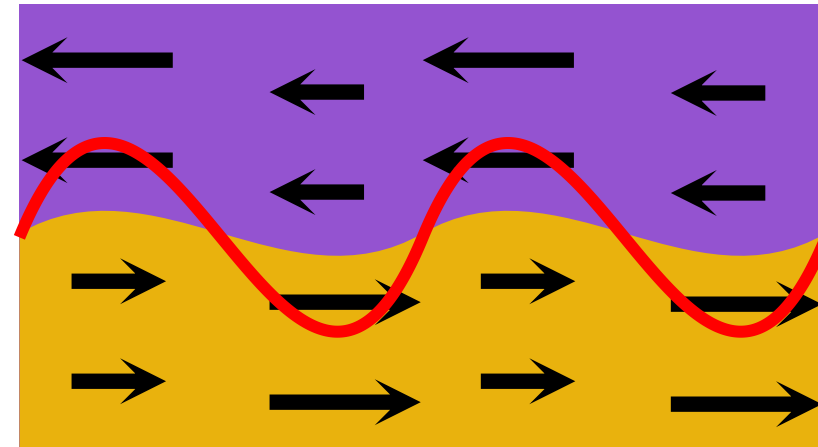
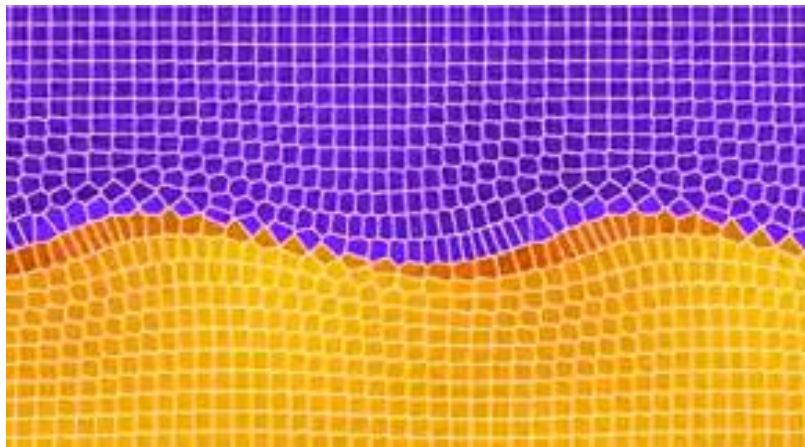
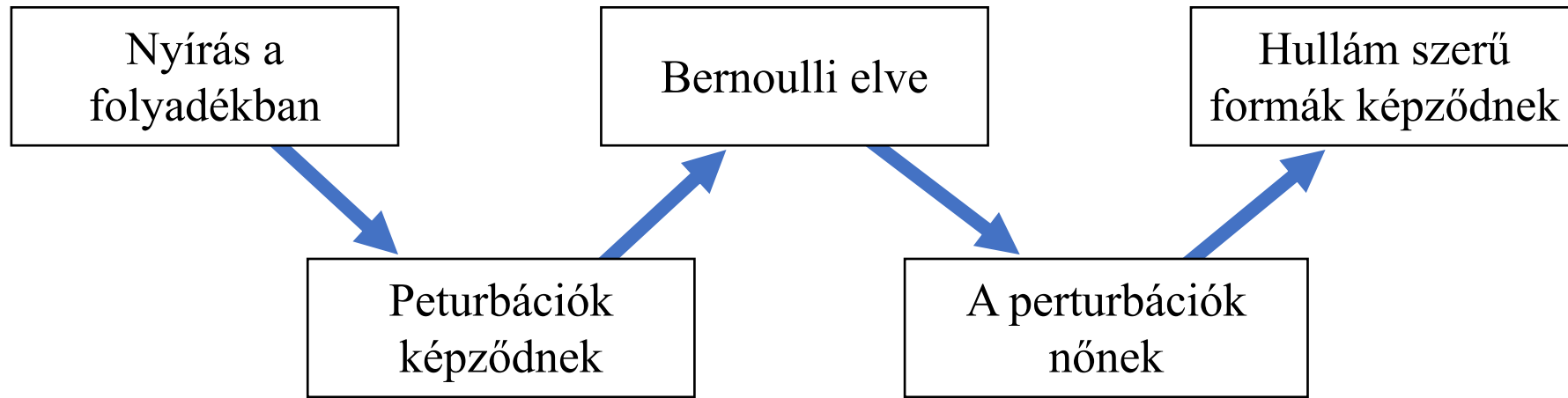
Bernoulli-egyenlet:

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh + p = \text{áll.}$$

Kontinuitási egyenlet:

$$A \cdot v = \text{áll.}$$



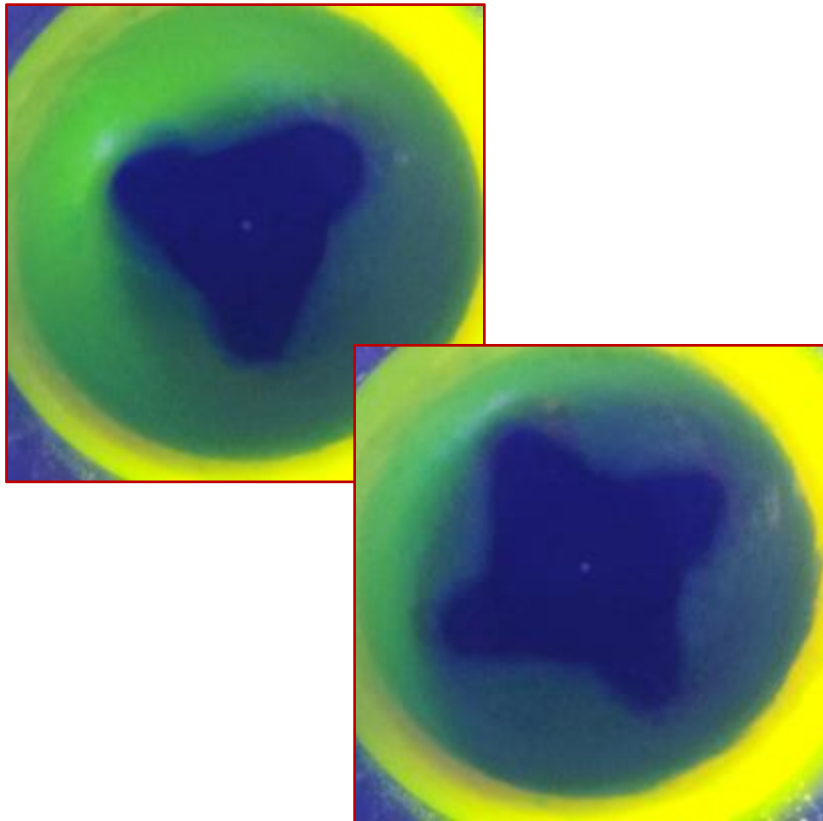


De mi nem hullámokat látunk, hanem sokszögeket.

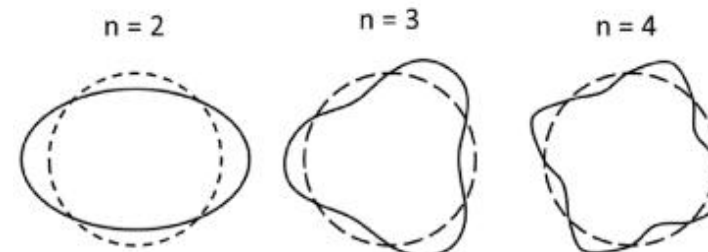
Hogy lesz hullámokból sokszög?

Hasonló hullámok  
képződnek

De nekünk egy  
folytonos  
határfeltételünk van



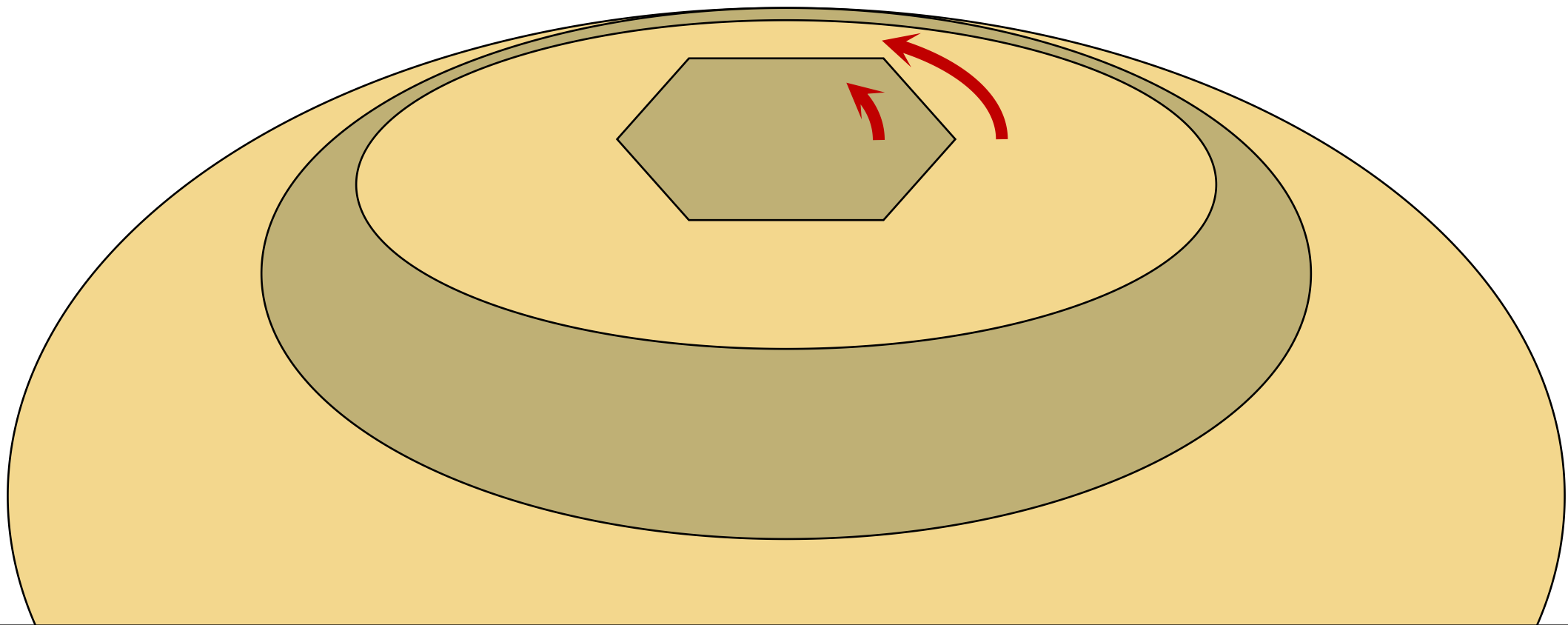
Csak azok a hullámhosszak  
erősödhetnek fel, melyek  
ráférnek erre a körre  $n \in \mathbb{N}$ -szer



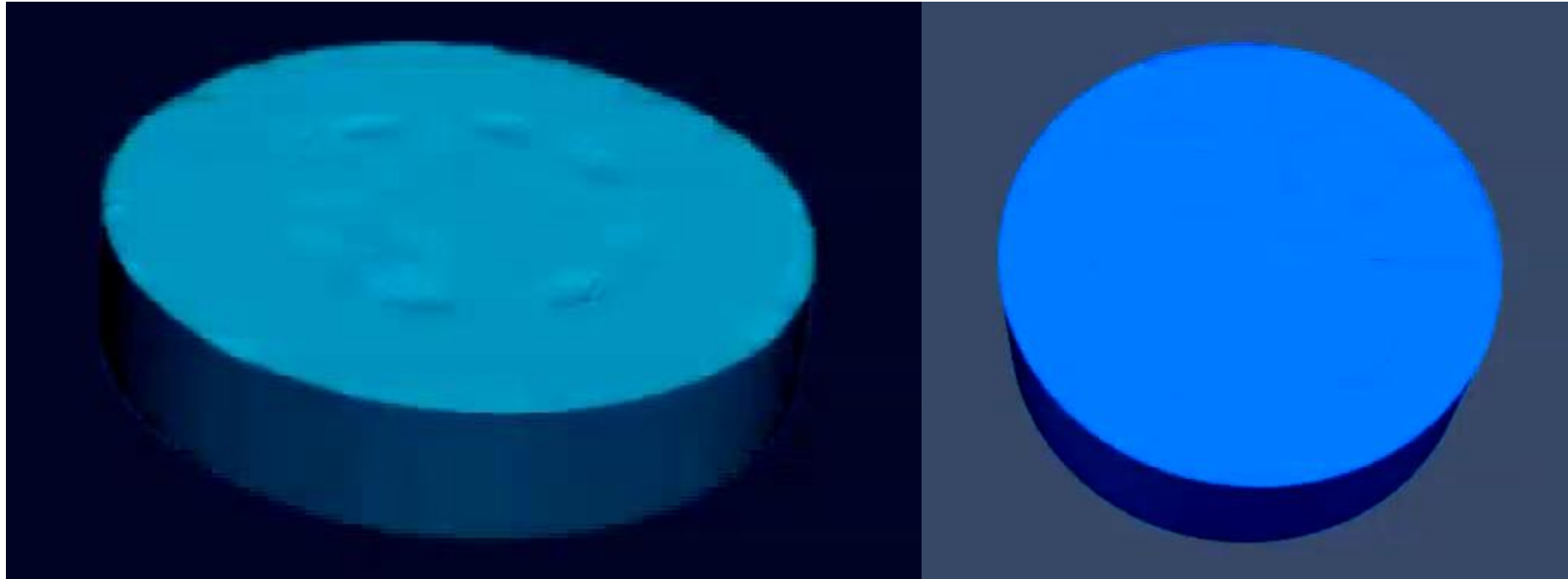


- Továbbra is van nyírás
- De a két réteg más anyagú (pl: más H és He koncentrációk)
- Kissé görbült geometria

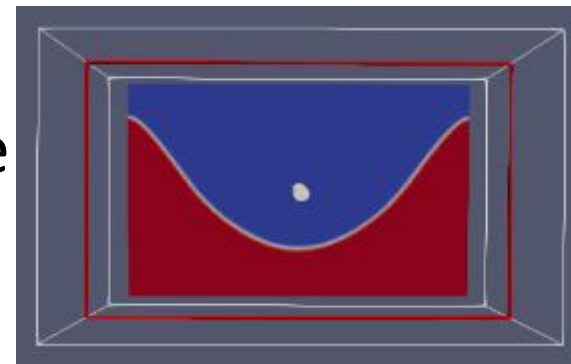
■ Máig aktív kutatási terület



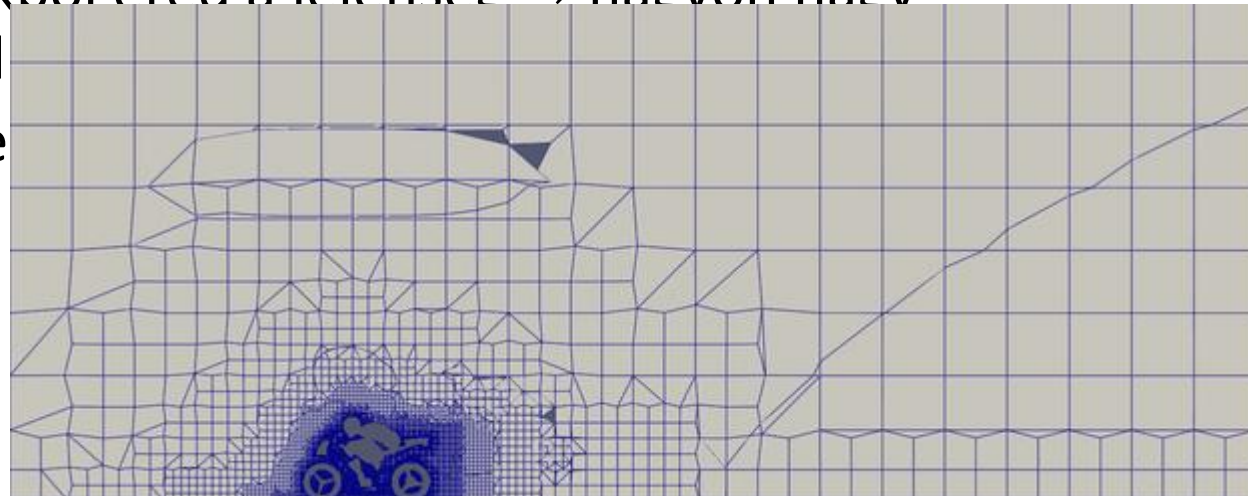




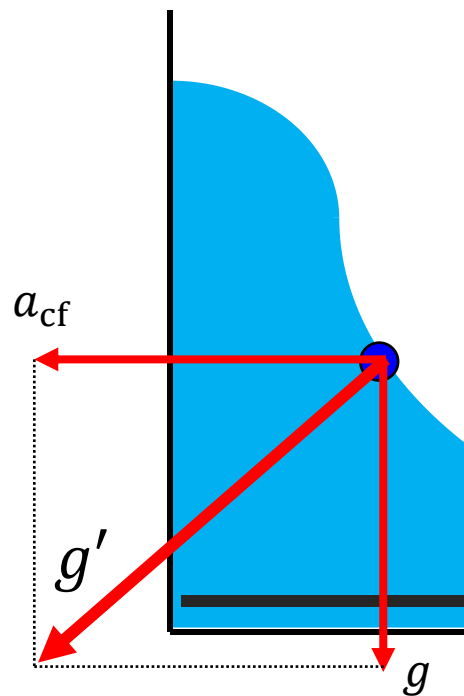
- A számítások napokig tartottak
- GPU lab of Wigner Research Centre
  - 48 CPU core; 760 GB RAM
  - 16 CPU core; 16 GB RAM



- Numerikus szimulációk (Navier–Stokes)
  - Nagyon bonyolultak:
    - Bonyolult határfeltételek
    - Dinamikus 3D rendszer (nagyon nagy idő és térfelbontás szükséges)
    - Az első, próba szimulációk is napokig tartottak
- Általánosságban hidrodinamikai jelenségeknél a szimulációk nagyon nehezek, instabilitásoknál még inkább
  - Kis perturbációkból ered a jelenség → nagyon nagy időfelbontás kell
  - Nagyon részletes



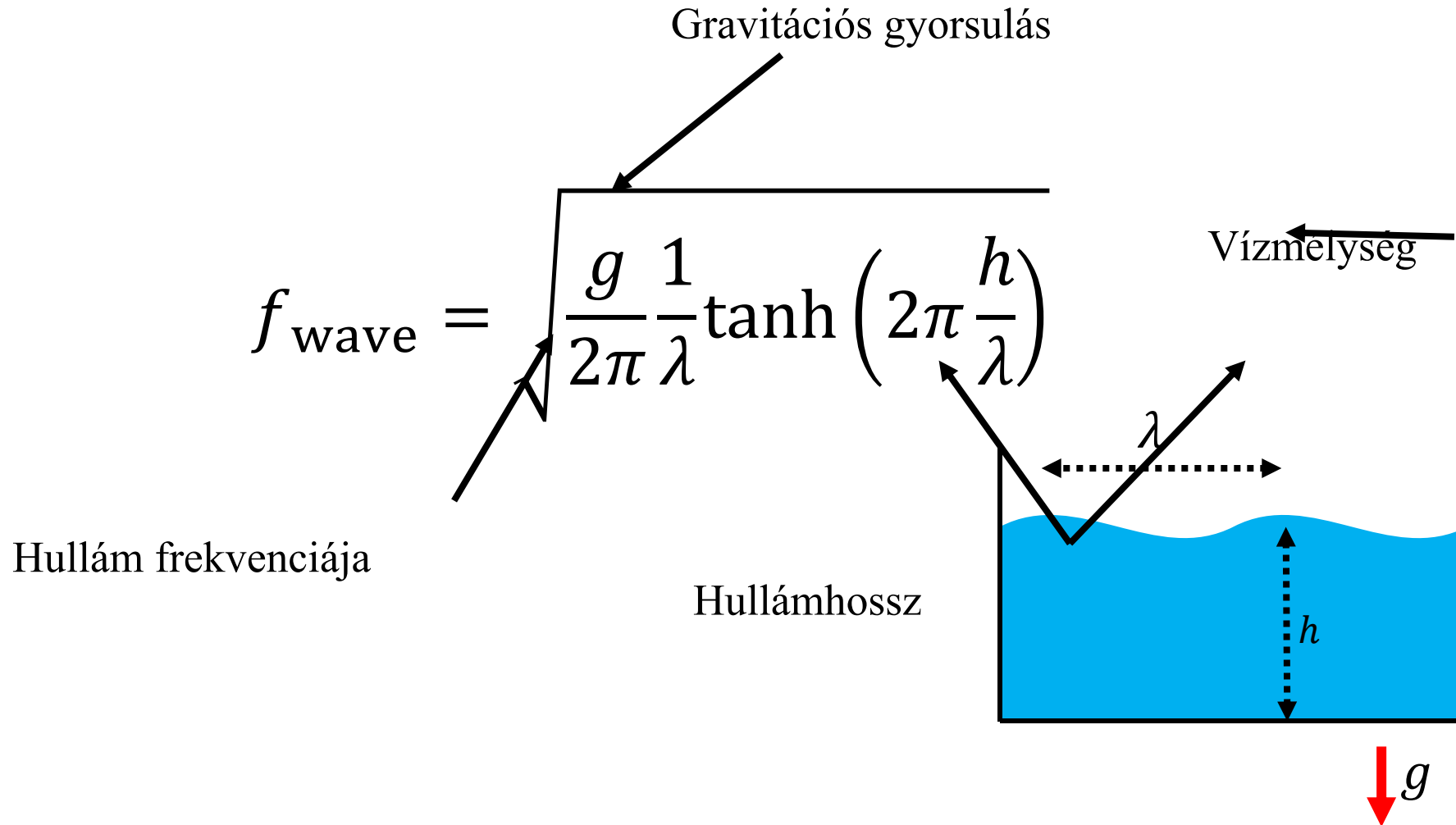
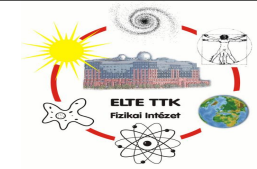
## Együttforgó rendszerből nézve



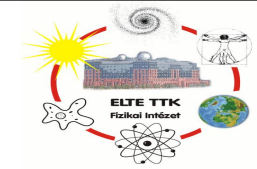
$$g' = \sqrt{a_{cf}^2 + g^2}$$

A sokszög formák ebben az effektív  $g'$ -vel rendelkező döntött világban lévő felszíni nehézségi hullámok

# Vízfelszíni nehézségi hullámok diszperziós relációja



# Vízfelszíni nehézségi hullámok diszperziós relációja



$f_{\text{wave}} = \frac{g'}{2\pi} \frac{1}{\lambda} \tanh\left(2\pi \frac{h'}{\lambda}\right)$

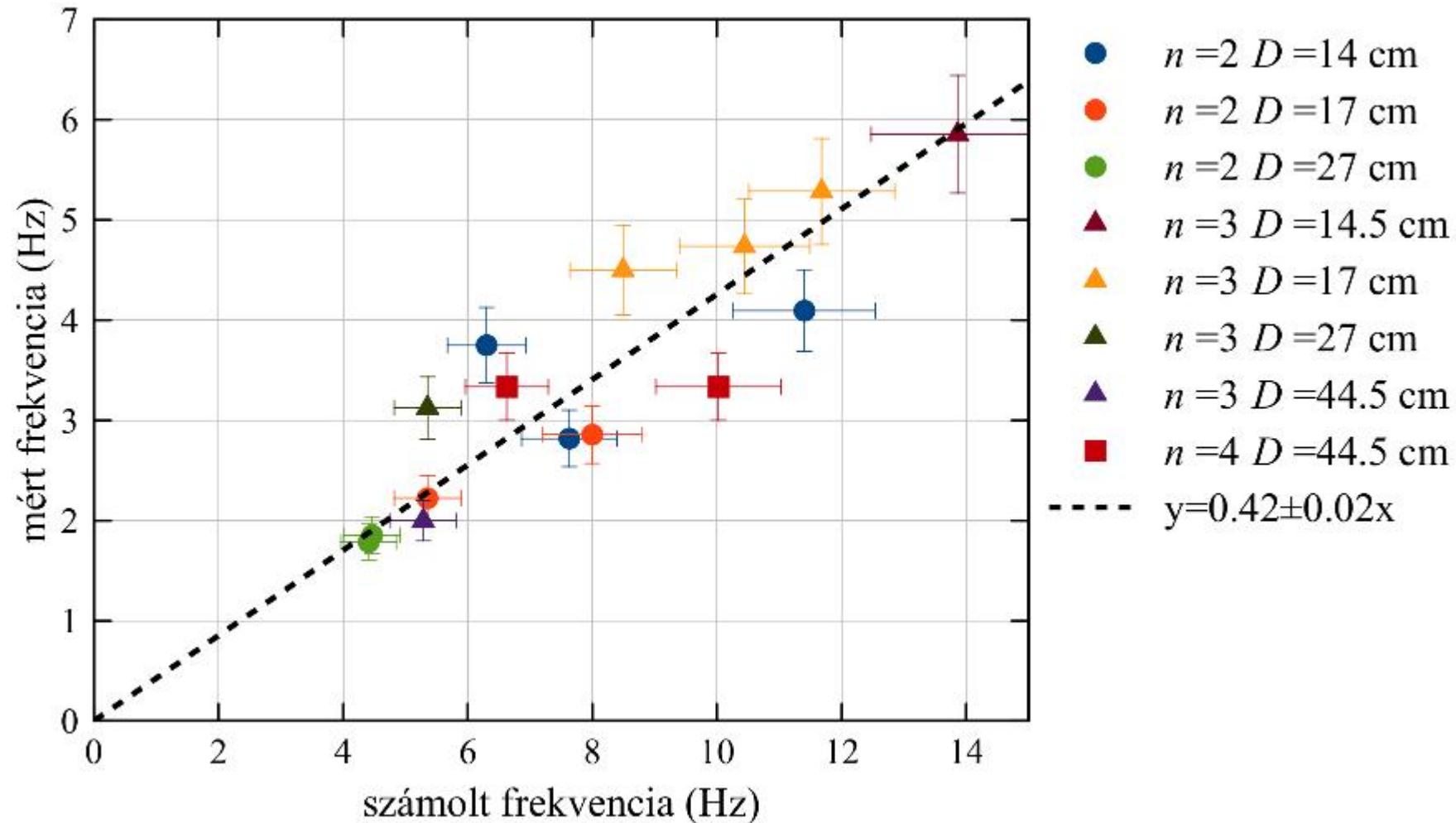
'effektív'  $g$

Nehéz megadni.  
 $h' \approx R - \bar{r}$  jó  
nagyságrendi  
becslés

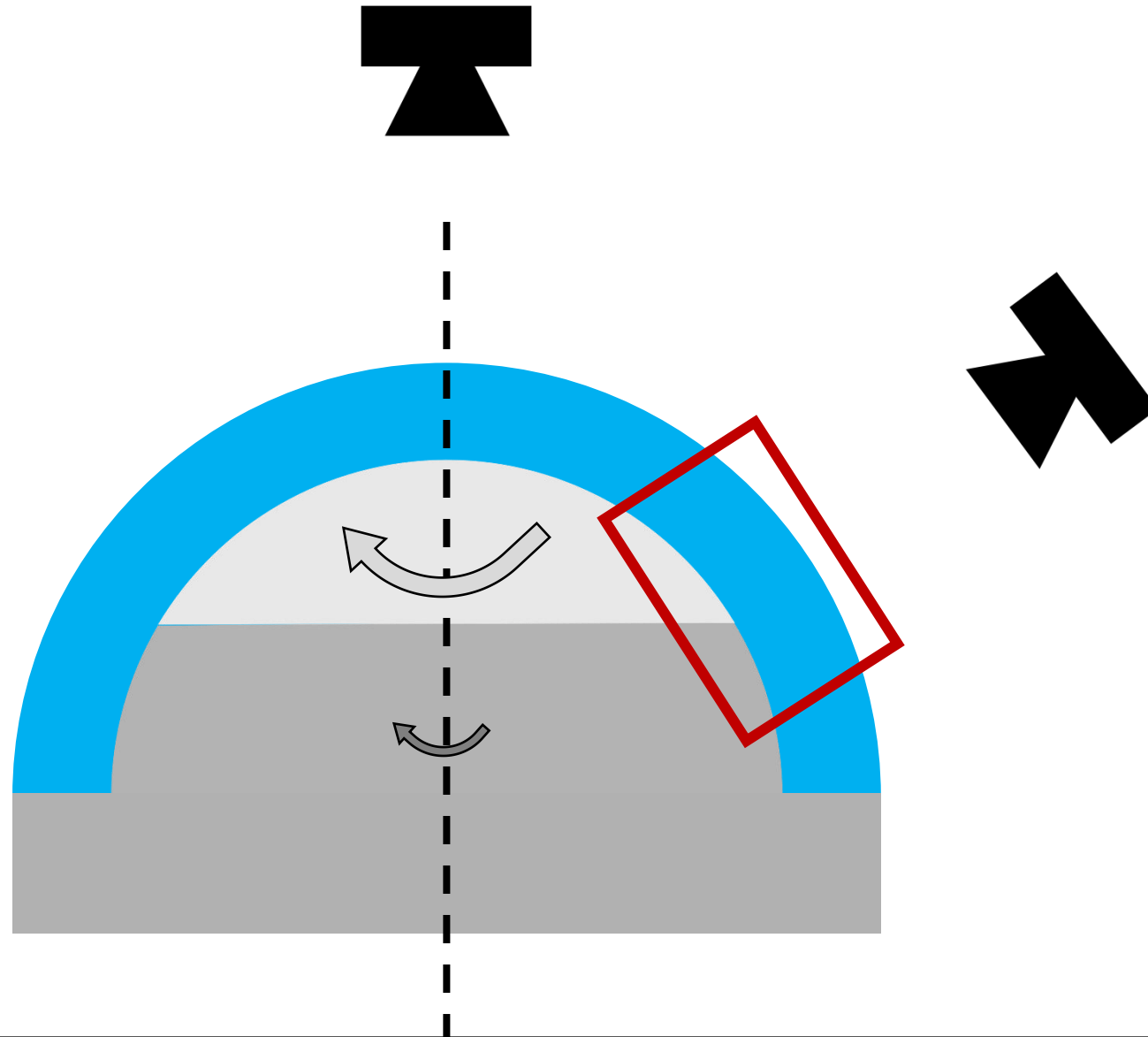
Hullám frekvenciája  
(Az együttforgó rendszerből)

Sokszögformák hullámhossza  
( $\bar{r}$ -nél)

The diagram illustrates a rotating fluid system. A blue fluid is contained in a container that rotates with angular velocity  $\Omega$ . The fluid surface is a paraboloid of revolution. A wave is shown on the sloped surface. The radius of the container is  $R$ . The distance from the center of rotation to the surface is  $\bar{r}$ . The wave height is  $h'$ . Gravity  $g'$  acts downwards. The wave frequency is  $f_{\text{wave}}$ . The wave length is  $\lambda$ . The effective gravity is  $g'$ .

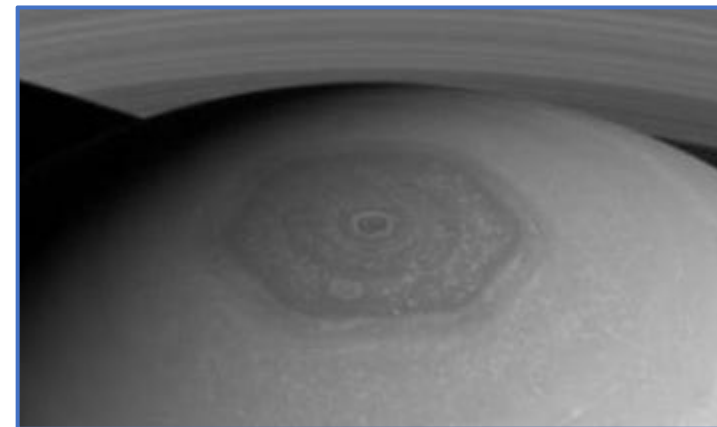
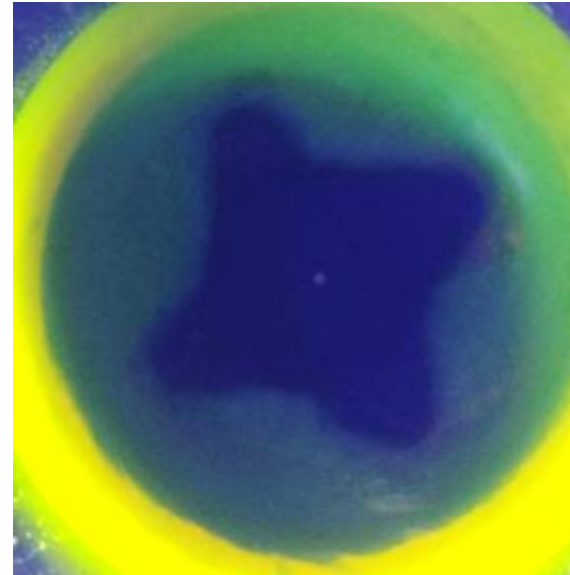


# Mérőműszer súlytalanságban





- Szaturnusz hatszöge
  - Nyírási instabilitás
- A mi jelenségünk
  - Felfogható vízfelszíni nehézségi víz hullámokként
  - $f_{\text{wave}} = \sqrt{\frac{g'}{2\pi} \frac{1}{\lambda} \tanh\left(2\pi \frac{h'}{\lambda}\right)}$



- R. BERGMANN, L. TOPHØJ, T. A. M. HOMAN, P. HERSEN, A. ANDERSEN, & T. BOHR. 2011 Polygon formation and surface flow on a rotating fluid surface. *J. Fluid Mech.* 679, 415–431.
- B.BACH, E. C.LINNARTZ, M. H. VESTED, A. ANDERSEN AND T. BOHR. 2014 From Newton’s bucket to rotating polygons:experiments on surface instabilities inswirling flows. *J. Fluid Mech.* 386-403.
- G. H. VATISTAS. A classical flow instability and its connection to gaseous galactic disk hydrodynamics.
- JANSSON, THOMAS R. N.; HASPANG, MARTIN P.; JENSEN, KÅRE H.; HERSEN, PASCAL; BOHR, TOMAS. 2006 Polygons on a Rotating Fluid Surface. *Physical Review Letters* 96, 174502.
- J. M. LOPEZ, F. MARQUES, A. H. HIRSA AND R. MIRAGHAIE. 2004 Symmetry breaking in free-surface cylinder flows. *J. Fluid Mech.* 502, 99-126.
- Kevin Schaal. „Kelvin-Helmholtz instability”. *Youtube*, 2012. Nov. 26., 1:20.  
<https://www.youtube.com/watch?v=nuK9PvlpUNg>